

# CLASSES, RELATIONS ET NOMBRES

ESSAI SUR LES GROUPEMENTS DE LA LOGISTIQUE  
ET SUR LA REVERSIBILITÉ DE LA PENSÉE

PAR

JEAN PIAGET

Librairie Philosophique J. Vrin

1942

## AVANT-PROPOS

Pourquoi la logistique, dont la technique déductive a acquis une précision rigoureuse, et la psychologie de l'intelligence, dont les méthodes se conforment aux règles de l'objectivité expérimentale, ne collaborent-elles pas à la manière des mathématiques et de la physique? Assurément l'intelligence a une histoire, et l'on ne saurait déduire les lois d'un développement historique. Mais on pourrait calculer les états d'équilibre de la pensée et se référer à ces états pour analyser les régulations ou les oscillations de la vie mentale, ce qui conduirait à comprendre comment l'évolution s'oriente vers un équilibre final. Pourquoi donc la logistique n'est-elle point utilisée par les psychologues comme instrument de calcul ou de déduction, et pourquoi les logisticiens ne s'intéressent-ils pas à la psychologie pour y chercher l'occasion de nouveaux problèmes opératoires?

Nous croyons que toutes les raisons de principes auxquelles on attribue ordinairement ce manque de contact demeurent secondaires et que la vraie cause est à chercher dans le caractère atomistique ou discontinu des entités logistiques, comparé aux « totalités » et aux systèmes d'ensemble auxquels se réfère la psychologie contemporaine dans sa description de la pensée et de la raison vivantes. Ouvrons, en effet, un traité de logistique: il y est question des classes, des relations, des propositions, etc., ou d'additions, de produits, d'implications, etc., comme si chaque terme existait en lui-même et indépendamment des autres; et cela chez de purs nominalistes comme M. Carnap aussi bien que chez les réalistes croyant aux « Universaux » comme : Russell. D'où cette conséquence que l'opération comme telle demeure au second plan et se réduit au rang de relation générale ou d'élément discret parmi les autres.

Pour la psychologie, au contraire, l'intelligence est

activité d'ensemble, et l'essentiel de la raison tient aux opérations qui sont des actions, intériorisées mais toujours effectives. Si nous en croyons ce que nous a appris le développement de la pensée chez l'enfant, l'opération est une action devenue réversible et la réalité concrète de la raison consiste alors en système d'opérations, directes, inverses ou identiques, mais toutes solidaires les unes des autres en fonction de cette composition totale.

Le but du présent ouvrage est donc de chercher à constituer une logistique opératoire des classes, des relations et des nombres, c'est-à-dire une logistique dont la structure serait parallèle et non plus hétérogène aux structures mentales. Nous tenterons ainsi de trouver dans la notion de « groupement » construite sur le modèle des « groupes » mathématiques, l'unité réelle de la pensée. Le principe en est fort simple : de même qu'un nombre entier suppose la suite des nombres ou qu'une valeur repose sur une « échelle » de valeurs, de même nous considérerons toute classe comme solidaire d'une classification, toute relation asymétrique transitive comme liée à une sériation d'ensemble, toute relation symétrique à un système de parentés ou d'emboîtements, toute multiplication logique (deux classes ou deux relations « à la fois ») comme émanant d'une table de correspondances (« tables à double entrée », etc.) et ainsi de suite. La théorie des « groupements » se propose alors de découvrir les lois de ces classifications, sériations et correspondances comme telles, par opposition aux lois des classes ou relations envisagées isolément, ainsi que de trouver les rapports entre ces totalités formelles et les « groupes » arithmétiques, et non plus entre telle ou telle « classe de classes » et tel nombre sorti de son contexte opératoire. A supposer que nous ayons réussi à justifier ainsi la notion logistique de « groupement », on voit d'emblée en quoi elle pourrait servir à l'analyse psychologique de l'intelligence, la notion d'opération devenant prééminente.

Mais, à vouloir nous adresser simultanément aux logisticiens et aux psychologues, nous craignons de décevoir les uns et les autres. Les premiers trouveront notre exposé trop intuitif et trop peu axiomatique et les seconds trop formel et schématique. Les uns et les autres auront raison et sans doute eût-il mieux valu écrire deux ouvrages distincts. Qu'on nous permette donc de renvoyer aux articles spéciaux qui fourniront aux uns et aux autres ce que nous

ne pouvions insérer dans ce livre déjà indigeste, sans l'alourdir encore bien davantage. Pour ce qui est des démonstrations elles-mêmes de la possibilité d'un calcul des « groupements » exempt de contradiction, ainsi que des principales transformations utilisées à cet égard, le lecteur soucieux de rigueur voudra bien se reporter aux quatorze théorèmes que nous avons exposés dans le *Compte rendu des séances de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, vol. 58 (1941), pp. 102, 107, 121, 125, 149, 154 et 192. Quant à l'aspect psychologique de la question, nous nous permettons de signaler, outre les ouvrages récents sur « La Genèse du Nombre chez l'Enfant » et sur « Le Développement des Quantités chez l'Enfant », cités dans le texte qui va suivre, un article d'ensemble paru dans les *Archives de Psychologie* (vol. XXVIII, 1941) sur « Le mécanisme du développement mental et les lois du groupement des opérations. Esquisse d'une théorie opératoire de l'intelligence ».

Jean PIAGET.

## INTRODUCTION

### LOGISTIQUE ET PSYCHOLOGIE DE LA PENSEE

La logistique est l'axiomatique de la pensée elle-même.

Toute axiomatique se réfère à un savoir réel, en dehors duquel la déduction pure perdrait sa signification. Mais, en dégageant momentanément de ses attaches intuitives ou expérimentales la science qui lui correspond, pour mieux en isoler le mécanisme intellectuel, une axiomatique constitue une sorte de préparation d'instruments : elle permet, tôt ou tard, à cette science de prendre possession de son objet concret d'autant plus fermement que l'analyse de son fonctionnement formel aura davantage affiné les outils de dissection.

Plus précisément, une axiomatique consiste à construire, pour une science donnée, un modèle idéal de la réalité <sup>1</sup>, un modèle du point de vue des faits, dont il dessine les lignes d'intelligibilité, et du point de vue de la pensée à laquelle il sert de charpente. C'est ainsi que la géométrie axiomatique en regard de la géométrie du réel, ou si l'on préfère des exemples plus proches de ce que seront nos préoccupations concrètes, la cristallographie géométrique en regard de la cristallographie physique ou l'« économie pure » en regard de l'économie politique ont constitué à la fois des modèles pour l'explication des phénomènes et des instruments de cohérence pour la pensée.

Seulement, pour qu'elle remplisse ainsi sa fonction, une axiomatique doit garder le contact avec le réel. Les modèles qu'elle construit ne peuvent avoir d'utilité s'ils deviennent trop artificiels, tandis qu'ils fournissent leur plein rendement dans la mesure où ils représentent une réalité simplifiée, mais vraie, un prolongement idéal mais possible

1. Un « schéma », dit M. Gonseth dans sa vigoureuse critique de la méthode axiomatique (Voir *Les fondements des mathématiques*, etc.).

des phénomènes c'est-à-dire lorsqu'ils traduisent les formes d'équilibre que ceux-ci tendent à réaliser, une fois éliminées les sources de complexité accidentelle ou de perturbations. Par exemple, l'élimination des déformations dues à l'intuition visuelle pour la géométrie, celle des causes d'irrégularités pour l'analyse des cristaux ou des contingences historiques et juridiques pour l'étude des réactions économiques, etc., permet réellement, d'atteindre les formes d'équilibre que prend en définitive l'objet de telles sciences.

Or, le cas de la psychologie de la pensée présente cette particularité remarquable que la raison constitue aussi bien un objet d'étude pour cette discipline qu'un instrument de connaissance pour le psychologue lui-même. C'est dire que, s'il existe une axiomatique de la psychologie de la pensée, cette axiomatique doit fournir tout à la fois un modèle par rapport aux phénomènes à analyser et une norme pour celui qui les analyse. On reconnaît à cette double situation la logique formelle, dont l'ambition est d'élaborer simultanément une description exacte des mécanismes du raisonnement et un corps de règles s'imposant à toute science, par conséquent aussi à la psychologie de la pensée.

Malheureusement, toute axiomatique tend à perdre de vue ses limites et sa fonction véritable. Il vient toujours un moment de son développement où elle est saisie par l'illusion des commencements absolus et où, de constructrice de modèles analytiques, elle veut devenir science des principes et des « fondements ». Cette déviation, dont le redressement a dominé l'un des aspects de l'histoire des mathématiques contemporaines, n'a point été épargnée à la logique formelle elle-même, ou logistique élémentaire des opérations de la raison.

C'est pourquoi le rapprochement de la logistique et de la psychologie de la pensée n'est devenu familier ni aux logiciens ni aux psychologues. Cependant, si la psychologie doit nous donner une analyse exacte de la raison et comprendre comment l'intelligence s'adapte la réalité, il est de toute évidence qu'il lui faut étudier et expliquer les normes que la pensée se construit au fur et à mesure de son développement : la logique ou théorie du fonctionnement et des structures de la pensée vraie est donc le chapitre le plus important de la psychologie de l'intelligence, si cette dernière science veut atteindre les ressorts de la connaissance qui réussit, et non pas seulement ceux de la pensée

qui échoue ou qui se prépare. Inversement, si la logistique veut être plus qu'un jeu formel ou qu'une science contestée des « fondements », son rôle est d'axiomatiser les processus réels de la pensée, si l'on peut dire, rôle qu'elle a fort bien compris en ce qui concerne les mécanismes achevés de la pensée mathématique, mais qui reste à développer dans ses connexions avec la psychologie. En particulier, la coopération de la logistique et de la psychologie génétique ne saurait qu'être féconde, tandis que dans chacune de ces deux disciplines, il semble parfois que l'on conçoive les conditions de toute recherche comme liées à l'exclusion du point de vue de l'autre science...

Or, si la logistique est une reconstruction axiomatique de la raison, et si la psychologie génétique de la pensée est l'étude expérimentale de la construction réelle correspondante, il est clair que leurs résultats doivent se rejoindre d'une manière ou d'une autre dans la théorie des formes d'équilibre du jugement.

Les phénomènes psychologiques se déroulent dans le temps. C'est ainsi que la construction de notions, de relations ou d'opérations comme celles de la correspondance univoque et réciproque, du nombre ordinal ou cardinal, de l'inclusion des parties dans un tout, etc., se présente à l'observation comme une activité concrète et vivante, distribuée en une série d'étapes qui définissent des progressions génétiques véritables. Il serait vain de chercher à « déduire » cette construction, comme tant de dialectiques soi-disant philosophiques s'y sont essayées, et tout aussi vain de vouloir remplacer sur ce terrain l'observation et l'expérience par une axiomatisation, laquelle négligerait par sa nature même les facteurs de durée et de succession propres à toute évolution. Par exemple, le nombre dérive-t-il du concept, ou l'inverse, ou résultent-ils l'un et l'autre de mécanismes communs plus généraux? Les notions de correspondance, de totalité invariante, etc., supposent-elles le nombre ou interviennent-elles dès le plan logique? Ce sont là, en un premier sens, des questions de fait que seule peut trancher l'étude expérimentale du mode réel et de l'ordre temporel de formation des opérations : ce sont, de ce point de vue, des problèmes de psychologie de l'enfant et de psychologie ethnographique.

Les connexions logiques sont indépendantes du temps, mais toute analyse axiomatique parvient à dégager un ordre de complexité croissante dans les implications mu-

tuelles des notions. En un second sens, les mêmes questions ressortissent donc à la logistique c'est affaire à l'étude formelle des opérations de nous montrer les rapports existant entre la logique des classes, celle des relations et l'arithmétique proprement dite. Sans doute, le caractère primitif ou dérivé d'une notion ou d'une opération est-il naturellement relatif au système d'axiomes d'où l'on part, et c'est précisément l'un des services que rend la méthode axiomatique de nous délivrer de l'illusion des notions ou des propositions « premières ». Un système d'axiomes est « un ensemble de propositions dont le but est moins de définir les notions dont use la théorie, que d'indiquer comment elles jouent les unes avec les autres dans la construction qui s'édifie par ce jeu même <sup>1</sup> ». Mais, sans revenir à l'idée d'une hiérarchie conçue comme existant en soi, il reste que l'analyse des implications met en évidence les connexions « naturelles » par opposition aux édifices de plus en plus artificiels. Il est certaines tentatives de réduction du nombre à la classe logique dont les complications sont éloquentes à elles seules, tandis que les parentés réelles qui unissent deux ou plusieurs notions les unes aux autres se retrouvent dans tous les systèmes. Il est certes permis d'invoquer à cet égard l'exemple des mathématiques elles-mêmes : parmi l'ensemble des constructions entre lesquelles il a toujours le choix, le mathématicien sait bien retenir la plus simple, ce qui ne signifie donc pas la seule possible, mais celle qui met en évidence les connexions les plus directes et les plus nécessaires.

Puisque la psychologie génétique de la pensée permet ainsi d'assister à la construction réelle des notions et que la déduction axiomatique conduit à dégager, leurs filiations ou parentés logiques, le problème se pose donc nécessairement de savoir quelles relations existent entre l'ordre temporel ou génétique de cette construction et l'ordre rationnel ou hiérarchique des opérations. Se confondent-ils l'un avec l'autre? Tel est le postulat de toute dialectique, et il pourrait naturellement être fondé sans que cela justifiait cette méthode paresseuse, dont le propre est d'éviter à la fois l'effort d'une reconstitution expérimentale de la genèse et celui d'une dissection des implications formelles, pour confondre ces deux sortes de recherches exactes, mais

1. G. Juvet, *La structure des nouvelles théories physiques*, p. 145.

distinctes, dans l'imprécision d'une déduction faussement intégrale. Mais il serait également concevable que les deux ordres divergeassent l'un de l'autre, et alors le problème serait de savoir pourquoi. Dans les deux cas, il est indispensable de confronter les données psychologiques et les données logistiques. Tel est le principal objet de notre recherche.

Mais il convient de dissiper d'emblée toute équivoque, et de formuler une règle susceptible de fixer les modalités d'une telle collaboration. La psychologie de la pensée étant une science expérimentale et la logistique étant l'axiomatique qui porte sur le même objet, il ne saurait exister entre les deux disciplines qu'un rapport de correspondance, rapport univoque et réciproque tant que l'on voudra, mais sans fusion ni même interférences. En d'autres termes, tout problème posé par la logistique soulève un problème correspondant en psychologie de la pensée, et réciproquement, mais aucun problème logistique ne peut être résolu par la psychologie ni aucun problème psychologique par la logistique. Il serait absurde, cela s'entend de soi, de vouloir plier des faits d'expérience à une déduction formelle ou l'inverse. En cherchant à retrouver sur le plan logistique l'équivalent de résultats obtenus en psychologie génétique, nous ne songeons donc à rien de plus qu'à poursuivre un parallèle ou à contrôler si nos interprétations sont formellement cohérentes. Interaction dans les problèmes et indépendance complète dans les méthodes et les solutions, telle est donc la formule que nous nous imposerons comme règle et qui définit à la fois l'existence et les limites du parallélisme entre les deux sciences qui nous intéressent ici.

Or, si les processus psychologiques se déroulent dans le temps, ils parviennent précisément à s'affranchir du temps. Une action comme telle est irréversible, parce qu'elle ne peut être annulée, ni inversée, ni répétée sans de nouvelles conditions psychiquement irréductibles. Mais elle tend à devenir réversible et elle y réussit lorsqu'elle atteint le rang d'« opération », c'est-à-dire lorsque la pensée lui fournit le pouvoir de remonter le flux des réalités en devenir et des expériences vécues. Si l'évolution psychologique est irréversible, l'équilibre mobile qui caractérise la connaissance et que poursuit tout mécanisme rationnel se définit ainsi par la réversibilité.

Cette constatation peut conduire très loin et permet une interprétation de l'intelligence entière, par opposition

à la perception ou à toute activité d'ordre non intellectuel. C'est une chose remarquable, en effet, que la pensée du petit enfant demeure irréversible dans la mesure où elle est prélogique et que la constitution de la raison se confonde avec l'élaboration progressive d'une réversibilité opératoire dans les conduites et les processus mentaux. On peut même dire que la pensée de l'enfant est irréversible à trois points de vue distincts. Du point de vue du fonctionnement psychologique, le jeune enfant ne sait pas, lorsqu'il pense, revenir au point de départ en cas d'erreur : il ne fait pas d'« hypothèses » c'est-à-dire précisément de marche provisoire en avant sous réserve d'un retour éventuel, mais il croit d'emblée tout ce qu'il pense et y reste accroché ensuite, même s'il essaye de se corriger après avoir reconnu s'être trompé. Du point de vue du contenu, il ne parvient pas à élaborer les principes élémentaires de conservation, tels que celle de l'objet, puis de la quantité de matière, du poids ou du volume en cas de changements de forme, etc. Enfin, du point de vue de la structure logique, le raisonnement propre à la petite enfance ou « transduction », s'explique par l'irréversibilité même des opérations, tant dans le domaine de la logique des classes que dans celui de la coordination des relations. Au contraire la constitution du raisonnement logique se marque à la fois par la réversibilité du fonctionnement psychologique, par celle du contenu et par celle de la forme comme telle.

Or, si la réversibilité caractérise tout état d'équilibre, dans le domaine de l'intelligence, c'est-à-dire l'état atteint par tout système de notions ou d'opérations au terme de sa construction psychologique, il est clair que cette constatation de fait soulève un problème logistique. Une suite d'opérations réversibles constitue ce qu'on appelle un « groupe ». Un groupe est un ensemble d'opérations tel que : 1° deux ou plusieurs opérations « composées » entre elles donnent encore une opération de même nature; 2° les compositions sont associatives; 3° chaque opération peut être inversée et ramenée ainsi à son point de départ; 4° une opération dite « identique » peut se composer avec l'une quelconque des autres sans donner de résultat nouveau par rapport à cette opération seule. Ces quatre critères du groupe présentent chacun une signification essentielle du point de vue psychologique : 1° la composition est la capacité de construire indéfiniment de nouveaux

concepts ou de nouvelles relations avec les opérations, données au point de départ; 2° l'associativité est la capacité d'atteindre le même résultat par deux chemins différents; 3° les opérations inverses attestent la réversibilité de toute construction rationnelle et 4° l'opération identique assure la stabilité du point de départ de tout raisonnement.

Cela étant, et toujours admise la règle de parallélisme énoncée plus haut, on peut se demander si à la réversibilité de l'intelligence sur le plan psychologique correspond une structure de « groupe » des opérations formelles sur le plan logique. Tel est le premier problème que nous chercherons à résoudre dans cet essai.

Nous aboutirons à la solution suivante : les opérations de classes et de relations constituent des systèmes qui présentent tous les caractères du « groupe », à cette différence près que chaque « élément » joue le rôle d'« opération identique » par rapport à lui-même, et par conséquent par rapport aux éléments d'ordre supérieur pour les transformations additives (résorption) et d'ordre inférieur pour les transformations multiplicatives (absorption). Nous appellerons « groupement » les systèmes ainsi constitués : *Un groupement est un système remplissant les conditions de composition, d'associativité et de réversibilité des groupes, mais tel que chaque élément joue le rôle d'identique par rapport à lui-même.* Les groupements sont donc les groupes « logiques ».

Mais ce problème du « groupement » est nécessairement lié à une seconde question. Pour analyser les groupes éventuels que constituent les opérations de la logique des classes et de celle des relations, il convient naturellement de dissocier ces opérations de toute préoccupation de nombre. Mais alors, et par cela même, il s'agit de dégager <sup>1</sup> les rapports entre les groupements additifs et multiplicatifs de classes et de relations des groupes correspondants de l'arithmétique élémentaire.

Or, contrairement aux tentatives fameuses de Russell et Whitehead, sans cesse renouvelées depuis, de réduire

1. Lorsque nous employerons sans plus les mots « logique » ou « la logique », il s'agira toujours de la logique des classes et des relations non-mathématiques, c'est-à-dire définies les unes et les autres par de simples qualités conceptuelles ne faisant intervenir ni nombres ni unités. « Logique » signifiera, donc « logique qualitative ». Mais cette terminologie ne préjuge en rien la question de savoir s'il existe ou non une logique générale englobant à la fois celle des groupements conceptuels et celle des mathématiques.

le nombre à la classe logique, et contrairement aux réactions dans le sens d'une dissociation radicale entre ces deux réalités, nous avons été conduits à constater que, dans le développement psychologique de la raison <sup>1</sup>, les opérations constitutives des classes, des relations et des nombres sont solidaires les unes des autres (voir conclusions II) et présentent précisément en commun les mécanismes de colligation, de sériation et de correspondance nécessaires à la construction des groupes tout en les différenciant de diverses manières. Si de telles constatations s'imposent psychologiquement et génétiquement, elles doivent correspondre à quelque nécessité sur le plan logique, et c'est là la seconde conclusion que nous avons cherché à établir axiomatiquement dans les pages qui vont suivre.

Notre programme est donc tout tracé. Au cours d'un premier chapitre, nous chercherons à dresser l'inventaire des actions psychologiques ayant atteint l'état de réversibilité complète, c'est-à-dire des opérations susceptibles d'être axiomatisées et de définir chacune l'élément d'un « groupement » logique. Puis, au cours des chapitres II à X, nous analyserons un à un les différents groupements qu'il est possible d'établir au moyen des classes et des relations, indépendamment des groupes arithmétiques. Nous serons alors en mesure de discuter des rapports entre le concept et le nombre (chap. XI et XII). Enfin, après ces analyses logiques, nous reviendrons pour conclure à la question des liens entre la logique et la psychologie, en comparant les résultats obtenus par la construction axiomatique de ces groupements élémentaires et les données fournies par la psychologie génétique des opérations logiques et arithmétiques.

1. Voir PIAGET et SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 1941 et PIAGET et INHELDER, *Le développement des quantités chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 1941.