

Manuscrit de J. Piaget rédigé à la suite du symposium du CIEG de 1973 à titre de position préalable de problèmes de recherche sur les catégories et les morphismes.

Version électronique réalisée par la Fondation Jean Piaget pour recherches psychologiques et épistémologiques.

[À l'origine, ce texte a été rédigé à des fins internes à l'attention des collaborateurs du CIEG; nous le mettons à disposition de la communauté scientifique dans la mesure où il contribue à mieux comprendre la portée que Piaget attribuait aux nouvelles recherches qu'il engageait vers 1974 sur les correspondances, les morphismes et les catégories, et qui font suite aux travaux conduits dans la deuxième moitié des années 1960 sur la notion de fonction mathématique.]

Les trois opinions principales émises lors de la séance de clôture du symposium de 1973 ont été : (1) qu'on étudiant les morphismes nous ne trouvons rien de nouveau puisqu'ils interviennent sans cesse en chacune de nos recherches précédentes ; (2) que l'analyse des morphismes et des catégories suppose la connaissance d'un ensemble de notions théoriques précises, si l'on ne veut pas en rester à des banalités psychologiques sans portée épistémologique ; mais (3 = opinion de Bresson) qu'il ne faut pas en rester aux cadres des logiciens et mathématiciens, sans quoi le contenu psychologique et significatif risquerait de glisser à travers les mailles, donc de nous échapper, si nous restons trop soumis à des a priori.

Il m'a par conséquent paru utile de chercher à préciser les problèmes que nous aurons à résoudre et leur signification nouvelle par rapport aux recherches antérieures. Pour ce faire, il s'agit d'abord de considérer les questions d'"échelles" et on me pardonnera de partir d'une comparaison entre celles des mécanismes cognitifs et celles de tout organisme au sens biologique de ce terme. Cette comparaison (sous I) restera naturellement toute métaphorique, mais elle peut servir à préciser les intentions.

I. Un organisme vivant d'une certaine complexité pluricellulaire présente, en effet, différents niveaux que l'on peut étudier chacun à part ou dans leurs relations. (1) Il y a au sommet le niveau des organes, objet de l'anatomie et des analyses morphologiques (anatomies particulières ou comparées). (2) En second lieu il y a l'étude des tissus et de leurs différenciations à partir de trois couches distinctes de l'embryogenèse (ecto-, méso- et endo-dermes objet de l'histologie. (3) En troisième lieu il y a cette zone complexe et d'analyse délicate des connexions intercellulaires, et, en particulier (dans le système nerveux), des coordinations synaptiques. (4) Enfin il faut mettre à part les études multiples et à différents sous-niveaux de la cellule elle-même avec ses divers paliers d'organisation. (5) Inutile d'ajouter que chacun de ces grands niveaux peut être étudié du point de vue des structures mais aussi de celui du fonctionnement, ce qui correspond alors à la physiologie. (6) Mais surtout il faut préciser que, en plus du fonctionnement particulier propre à chaque niveau ou sous-niveau, le problème central est celui des inter-régulations, autrement dit de la structure et du fonctionnement de l'organisme entier, en tant que totalité (ou qu'intégration en un seul tout des parties différenciées).

Cela dit, il est évident que les recherches poursuivies jusqu'ici sur la psychogenèse des fonctions cognitives correspondent à certains de ces six aspects des études biologiques, mais à certains seulement, et qu'il reste de nombreuses lacunes à combler ; il s'agit alors de les préciser avec soin.

C'est à cet égard que les recherches proposées sur les morphismes et les catégories nous paraissent correspondre à des problèmes non abordés jusqu'ici, mais à la condition de les situer à leur rang dans un tableau d'ensemble comparable à la classification précédente des questions biologiques.

En fait ce qui a été abordé jusqu'aujourd'hui me semble correspondre aux échelons (1), (5) et en partie (6), mais avec des lacunes considérables sur les points 4 et 3 ainsi qu'en partie 2 (à supposer qu'au point de vue mental on puisse distinguer 2 de 3 et de 1, ce qui reste à discuter). Nos travaux ont porté longtemps sur la formation de structures particulières, telles que celles de nombre, d'espace, de causalité, etc. et il va de soi que ce genre de structures correspondent à ce qu'il faudrait désigner biologiquement par le terme d'organes, puisqu'il s'agit à la fois d'instruments spécialisés au service du fonctionnement total et de sous-systèmes à caractères différenciés : il s'agit donc des échelons de type 1. Dans la suite nous nous sommes préoccupés de problèmes de fonctionnement, tels que ceux de la prise de conscience, de l'abstraction, de la généralisation ou des dépassements de la contradiction et, puisqu'il s'agit alors de fonctions, c'est là l'équivalent de ce que l'on pourrait appeler une physiologie de la connaissance (niveau 5). D'autre part, j'ai cherché à aborder les problèmes de la totalité (niveau 6) en esquissant une théorie de l'équilibration, mais sans pouvoir entrer suffisamment dans les détails, faute de connaissances détaillées sur les niveaux 2 à 4.

En effet, les grandes lacunes qui subsistent en nos connaissances des mécanismes cognitifs tiennent à notre ignorance relative de ce qui correspondrait, au plan de l'intelligence, aux informations sur la cellule (niveau 4), sur les connexions intercellulaires (niveau 3) et même sur la formation des tissus dont sont faits les organes (niveau 2). Certes nous sommes constamment partis des notions élémentaires de "schèmes" d'action, avec leurs propriétés fonctionnelles d'assimilation (reproductrice, réognitive et généralisatrice) et d'accommodation. Mais il est clair que cette description demeure bien trop globale et que le problème subsiste d'établir eu moyen de quels "instruments" se construisent les divers schèmes d'assimilation en toutes leurs variétés et à quels résultats particuliers aboutissent ces constructions respectives, avant d'en arriver aux grandes structures générales.

II. L'analyse de la fonction (vol. XXIII des "Etudes") nous a, il est vrai, fourni un début de solution, en cherchant ces "instruments" dans la direction de la logique combinatoire au sens de Curry et en interprétant les fonctions comme construites au moyen de ces "combinateurs" (appelés plutôt "coordinateurs" pour garder les distances à l'égard de la logique formalisée). Comme

les coordinateurs les plus simples constituent effectivement les divers aspects de l'assimilation même sensori-motrice, nous nous proposons d'abord de généraliser ici cette hypothèse en considérant de la manière suivante les trois niveaux à explorer (et correspondant aux paliers 4, 3 ici 2 des activités cellulaires, intercellulaires et tissulaires au plan biologique) :

(A) – Nous aurions au départ un ensemble de "coordinateurs" traduisant les activités du sujet lorsqu'elles ne comportent qu'une seule action appliquée à deux objets au maximum, donc à un seul et même objet, considéré à nouveau, ou à cette unité fonctionnelle fondamentale que constituent les "couples". Tels seraient par exemple les coordinateurs de répétition (assimilation reproductrice), d'identification (assimilation réognitive), de remplacement (assimilation généralisatrice, quand un objet b est utilisé comme a), de substitution (remplacement réciproque) de réunion sans ordre (ab ou bc), de succession (ordre à deux éléments), de permutation, etc (pour ces questions, voir plus loin sous V).

(B) – Généralisés ou combinés entre eux ces coordinateurs conduiraient ensuite à des "coordinations" à 3 ou n éléments, dont la forme générale serait celle des "correspondances" (indépendantes du "tous" et du "quelques") et les formes plus spéciales des "applications" (avec les spécifications "tous", "au moins un", "un au plus", "un et un seul", etc. indépendamment de l'ordre) et enfin les "morphismes" avec conservation de l'ordre (y compris les fonctions). On peut ainsi espérer trouver, à un niveau correspondant (métaphoriquement !) à ce que sont, dans l'organisme, les connexions intercellulaires, un ensemble de liaisons complétant notre connaissance de la semi-logique préopératoire. Il s'agira en particulier, du point de vue cognitif, d'analyser les diverses connexions dont seront faites les grandes structures opératoires (un groupe est par exemple un système d'applications bijectives à l'intérieur d'un même ensemble de départ et d'arrivée), et de saisir ces connexions en leurs formations respectives, dans la double optique des transformations actives et de leurs résultats.

(C) – Ce sont alors les transitions entre ces "coordinations" élémentaires et les structures opératoires qui permettront d'assurer l'analyse des compositions entre "applications" et ou "morphismes", autrement dit la description de tels systèmes en termes de "catégories". Le grand avantage psychogénétique de la notion de catégorie est qu'elle peut intervenir à tous les niveaux, puisque ses compositions internes ne sont pas nécessairement complètes et qu'elles ne comportent pas une opération identique unique. Si l'on voulait s'amuser à compléter les comparaisons métaphoriques dont nous sommes partis, les "coordinateurs" exprimant les activités assimilatrices élémentaires seraient à un niveau cellulaire, et les correspondances ou morphismes à un

niveau intercellulaire, tandis que les catégories fourniraient les tissus dont sont finalement formées les structures opératoires particulières ou organes de la connaissance. Mais s'il ne s'agit là que de métaphores, elles ont cet avantage de situer le problème des morphismes à sa véritable échelle, qui est celle des liaisons à la fois les plus simples et les plus générales. Il importe alors de vérifier de près s'il en est bien ainsi, c'est-à-dire si les applications et les morphismes constituent effectivement tout à la fois les composantes communes et les facteurs de constructions différenciables dont sont faites toutes les organisations structurales préopératoires et opératoires.

III. Le premier problème psychogénétique que me paraît soulever cette hypothèse du rôle élémentaire des morphismes est que mathématiquement les applications et morphismes comportent des quantifications, tandis que le réglage opératoire du "tous" et du "quelques" est relativement tardif. Il est naturellement possible que cette quantification des morphismes soit également tardive, et en ce cas la fonction formatrice que nous leur supposons serait à restreindre à certains seulement d'entre eux. Mais il se peut aussi, et c'est notre hypothèse, que la quantification inhérente aux morphismes soit d'une autre nature que la détermination d'une quantité numérique ou logique, autrement dit qu'il n'y intervienne pas à titre de composition opératoire les relations déterminées de "plus" et de "moins". Lorsque l'on évalue un nombre de 5 ou 10 objets ou l'extension de "tous" les éléments d'une classe comparée à celle ("quelques") d'une sous-classe, c'est pour en conclure que  $10 > 5$  ou  $10 = 2 \times 5$  ou tous  $>$  quelques, etc. Il y a donc là l'estimation d'une quantité et c'est là ce qui est génétiquement tardif (cf. les non-conservations, etc.).

Par contre, lorsqu'en présence de deux collections d'objets (classes) ou de deux systèmes de parties ou morceaux d'objets (méréologie ou opérations infralogiques)\* E1 et E2, on dit qu'il y a "application" si tout élément de E1 ( $x \in E1$ ) correspond à au moins un élément de E2 (soit  $fy \in E2$ ), tandis qu'en une correspondance en général cette condition "tout  $x$ " n'est pas nécessaire, la question n'est pas d'évaluer les quantités de E1 et de E2, mais de déterminer les relations élément à élément. En ce cas, le "tout"  $x$  n'équivaut nullement encore (au moins psychologiquement) à "tous les  $x$ " (extension logique ou numérique) mais à "chaque  $x$ " considéré à part, ce qui est bien différent : par exemple en une fonction  $b = f(a)$  un enfant de 5-6 ans peut reconnaître que chaque variation de  $a$  entraîne une variation de  $b$  sans avoir la conservation du tout (par exemple si  $a + b =$  longueur totale constante). On peut même

\* A noter que les morphismes sont plus "élémentaires" que les relations entre "ensembles".

presque dire que "chaque  $x$ " exprime en compréhension une qualité commune des  $x$  examinés successivement, qualité qui consiste à pouvoir trouver pour chacun au moins un correspondant dans les  $y$ , sans qu'il soit besoin de déterminer l'extension des uns ou des autres.

Quant à l'expression quantitative "au moins 1" ( $1 y$ ) elle se réfère encore moins à une extension numérique ou logique des  $y$ , mais revient sans plus à établir si parmi les  $y$  on en trouve un chaque fois que l'on cherche un répondant à l'un des  $x$ . C'est ainsi qu'en comparant un singe à un homme on y retrouve à peu près tous les caractères morphologiques, mais pas de queue (sauf à chercher le coccyx sous le peau) : la propriété "au moins 1" est alors infirmée (ou vérifiée) sans aucun besoin d'un dénombrement ou d'une quantification logique qui peuvent se surajouter, mais ne sont pas nécessaires au départ.

Dans le "surjection" interviennent "tous les  $y$ " en plus de "tous les  $x$ " et "au moins une" relation entre un  $x$  et un  $y$ . Nous pouvons de même y retrouver au début de simples relations en compréhension : pour les qualités communes à tous ("chaque"), ou pour les qualités différentielles spéciales à un  $y$  comparé à un ou plusieurs  $x$ . Mais le problème est qu'il intervient alors une correspondance "plusieurs à un" entre les  $x$  et les  $y$ , tandis qu'en une "injection" on peut avoir la correspondance un à plusieurs. Or E. Schmid a montré, en son expérience sur les fonctions, que les correspondances n'étaient pas de même facilité ; mais il s'agirait alors, soit d'appliquer plusieurs moyens à un même but, soit de les réunir en une classe (en extension). Si nous en restons au plan de l'action il semble en revanche que, par exemple, de partir de plusieurs points pour aboutir à la même maison ou de sortir de celle-ci pour s'engager en ces mêmes directions ne comporte guère de différences quant aux difficultés à vaincre (apparemment nulles).

Quant à l'"injection", chaque  $y (\in E2)$  reçoit "au plus" une relation (ou flèche) à partir des  $x$ , autrement dit "une ou aucune" et dans le bijection  $y$  reçoit "un et un seul" arc. Or, ici à nouveau il n'est pas nécessaire qu'il y ait quantification numérique, car si "un" logique caractérise une classe singulière fondée sur l'identité, de telles correspondances peuvent d'abord porter sur les objets (contenus) caractérisés en compréhension.

Quant aux "morphismes" au sens strict, ce sont des applications conservant l'ordre inhérent aux ensembles correspondants et on y retrouve alors les distinctions précédentes des "épimorphismes" pour les surjections, des "monomorphismes" pour les injections et des "isomorphismes" pour les bijections. Il n'y a donc pas de nouveaux problèmes de quantification, pas plus que pour les "endomorphismes" ("dans" le même ensemble) ou les "automorphismes" ("sur" le même). Nous pouvons, par exemple, citer un

endomorphisme tellement indépendant de toute quantification en extension qu'il est en fait entièrement illusoire, mais reste intéressant par la tendance dont il témoigne chez les très jeunes sujets à exiger certaines correspondances entre la partie et le tout : en étudiant jadis avec B. Inhelder la notion de "point" comme élément d'une ligne ou d'une surface, nous avons constaté l'existence d'un niveau où l'enfant croit qu'en découpant aussi loin que possible un carré, etc. on trouvera effectivement des "points" mais qui seront toujours eux-mêmes carrés, ou ronds, triangulaires, rectangulaires, linéaires, etc. Or, il y a là une différence considérable entre cet endomorphisme imaginaire (ou figuratif) et la découverte tardive qu'un petit morceau de bouchon ou de métal, etc. a la même densité que l'objet total dont il est extrait (voir Le développement des quantités physiques chez l'enfant) parce que la densité implique une relation quantitative entre le poids et le volume, ce qui suppose des morphismes et des opérations de niveau bien supérieur.

En conclusion de ce point III il n'est donc pas de raison de ne pas considérer les applications et morphismes comme des structurations élémentaires du fait qu'ils comporteraient une quantification, puisque celle-ci ne comporte pas une estimation des extensions et ne porte que sur les valeurs "un et un seul", "au plus un", "au moins un", et "tous" dans le sens de "chaque". Or, nous supposons que toutes ces déterminations peuvent se faire en compréhension et la meilleure preuve en est qu'on les trouve dès les niveaux sensori-moteurs où le sujet ignore les extensions. Par exemple dans les correspondances que le bébé recherche entre les sons et la perception visuelle de l'objet sonore, il part du postulat que "chaque" son (donc "tous" pour l'observateur) actuellement entendu doit correspondre à un tableau visuel, mais cela avec toutes sortes de nuances : à des voix connues le son correspondra chaque fois à "un et un seul" personnage, à des voix peu connues mais en successions distinctes, ce sera à "au plus un" chaque fois, à un écroulement d'objets ce sera "au moins un", etc. Il est donc facile de concevoir que, si les quantifications relatives à "un" ou aux valeurs voisines "aucun" ou une pluralité indéterminée, c'est-à-dire relatives à l'attribution en compréhension de certaines qualités à certains objets, sont réalisables aux niveaux sensori-moteurs, on les retrouvera à ceux des actions ultérieures, même sans conceptualisation rapide.

IV. Mais il va de soi que si les applications et morphismes ne supposent pas, à titre de conditions préalables, de quantifications extensionnelles numériques ou logiques, ils y conduisent tôt ou tard et même assez rapidement et cela en particulier dans le cas des fonctions bijectives (à distinguer des applications du même nom), donc des correspondances biunivoques et réciproques qui engendrent le nombre et sont précoces chez l'enfant sous

forme de correspondances optiques ou spatiales antérieures aux conservations de l'équivalence. Seulement, il faudra prendre un soin particulier, en nos recherches, pour distinguer deux sortes de correspondances, dont les logiciens ont négligé la dualité (d'où entre autres le cercle qui subsiste dans la théorie du nombre cardinal chez Russell et Whitehead) : c'est la correspondance que nous avons appelée, depuis longtemps, "qualitative" et qui fonde les mises en relation entre objets sur le fait qu'ils ont les mêmes qualités (par exemple, en un dessin le nez de la copie correspond à celui du modèle, les yeux aux yeux, les bras aux bras, etc) et la correspondance "quelconque" qui fait abstraction des qualités (par exemple les maréchaux de Napoléon correspondent 1 à 1 aux mois de l'année sans liaison entre un maréchal particulier et un mois plutôt qu'un autre).

Or, cette distinction est d'une certaine importance théorique, car on voit mal comment distinguer les classes et les ensembles sinon par le fait que ces derniers comportent une "puissance", c'est-à-dire peuvent être mis en correspondance biunivoque "quelconque" avec d'autres (dont la suite des nombres naturels), tandis que les correspondances entre deux classes qualifiées (les Oiseaux et les Mammifères) ne peuvent être que qualitatives. En particulier le produit cartésien de deux classifications portant sur les mêmes objets fournit un modèle de correspondances qualitatives de rangée à rangée et de colonne à colonne et c'est une structure que l'enfant construit spontanément dès les environs de 7 ans.

Si ce qui a été développé sous III au sujet de la quantification élémentaire propre aux diverses variétés d'applications et de morphismes est exact, il semble alors clair que leurs formes primitives seront fondés avant tout sur des relations en compréhension, donc qualitatives (exemples : une représentation imagée ou conceptuelle, un dessin, etc.), tandis que par ailleurs les formes supérieures de correspondance quelconque constituent un instrument puissant de quantification, comme le montre toute l'œuvre de Cantor. Un soin particulier doit donc être consacré à l'étude des transitions entre les deux types qualitatif et quelconque de correspondance, dans le détail des réactions psychologiques.

Ce problème général rejoint celui des structures de morphismes, donc des "catégories". S'il est vrai, comme nous l'ont déjà soutenu nos experts, qu'il existe une différence considérable entre la "catégorie" des ensembles et celle des classes, il y a là un beau problème à creuser du point de vue psychologique, et ce que nous avons pu faire jadis quant à la construction du nombre est naturellement à réexaminer dans une telle perspective.

V. Si les applications et morphismes ne comportent que des quantifications élémentaires et dépendent d'abord avant tout des liaisons en compréhension, on peut les concevoir comme constituant le mécanisme principal qui assure la conceptualisation des actions et leur transformation en représentations. Cela va de soi non seulement parce que toute représentation est un morphisme, mais encore parce que l'imitation en tant que source de la fonction sémiotique est en elle-même un processus de mise en correspondance.

Mais il peut être intéressant de remonter plus haut et de faire quelques hypothèses sur le mode de formation des morphismes à partir des actions elles-mêmes en reprenant à titre purement théorique (mais dans l'espoir de préciser les positions) l'idée des "coordinateurs" en tant la fois que formes générales de l'assimilation à 1 ou 2 éléments et que source des différentes sortes de correspondances entre  $\underline{n}$  et  $\underline{n}'$  éléments. Nous en distinguerons 14, distribués en 3 classes, selon que leurs relations dominantes relèvent de la ressemblance, de l'ordre ou des facteurs infralogiques.

A(1) – Comme déjà vu sous II les plus simples des coordinateurs (nous préférons ce terme psychologique se référant aux coordinations d'actions à celui de "combinateur" de Curry qui évoque des opérations) est celui de répétition (le combinateur  $\underline{h}$ ) qui exprime sans plus la tendance reproductive de l'assimilation. Généralisé et tenant compte des divers caractères  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ , d'une action qui se retrouvent en sa répétition, le premier coordinateur conduit à un automorphisme, du point de vue de l'action.

(2) – Portant sur un objet  $\underline{x}$  et le retrouvant lors de la répétition, il donnera lieu à une identification (combinateur I de Curry), par assimilation réognitive. Le morphisme auquel il conduit est une forme d'isomorphisme total (\*) ou d'automorphisme du point de vue de l'objet.

(3) – Remplacement. En cas de situation analogue, mais non identique à celle d'une action initiale, celle-ci peut donner lieu à une assimilation généralisatrice, en remplaçant l'objet antérieurement utilisé par un nouveau : en ce cas il y aura "application" si toutes les conditions  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  de l'action voulue correspondent à certains des caractères du nouvel objet, et cela même si celui-ci présente en plus des propriétés  $\underline{d}$  et  $\underline{e}$  non pertinentes ("injection").

(4) – Substitution. Nous la définirons comme un remplacement réciproque, au cas, par exemple, où le sujet construit deux tas  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  et place en  $\underline{B}$  un élément de  $\underline{A}$  mais complète alors  $\underline{A}$  par un élément de  $\underline{B}$ . (Curry ne distingue pas 3 et 4 mais 4 suppose une sorte de compensation, qui est plus évoluée.

---

\* Si l'on en croit l'exemple donné par Bochenski en son Traité de Logique : "ma pipe = ma pipe".

(5) – Réunion. Sous cette désignation de multiples variétés sont possibles et il est essentiel de les distinguer génétiquement. Lorsque l'on parle d'applications ou de morphismes entre ensembles, on suppose données des réunions préalables : celles qui sont constitutives de ces ensembles et n'interviennent plus dans les relations de correspondances que l'on établit entre eux. Mais il importe de se rappeler qu'il existe des applications et morphismes plus primitifs que ceux dont on fait usage entre ensembles et c'est à ces formes élémentaires qu'il nous faut remonter, jusqu'au niveau des correspondances en "compréhension" entre schèmes sensori-moteurs.

C'est ainsi qu'à un certain stade le bébé porte à sa bouche tout ce qu'il touche de la main. À un autre niveau, qui est celui où il essaie de saisir ce qu'il voit, il amène devant ses yeux ce qu'il a atteint en dehors du champ visuel. Nous avons déjà rappelé en outre la tendance à chercher le tableau visuel correspondant à un son. Etc. En ces divers cas il y a correspondance entre des actes de préhension et de succion, ou de vision et de préhension, ou d'audition et de vision, etc. et ces correspondances sont issues d'une forme élémentaire de réunion : une réunion (ou assimilation réciproque) de schèmes et non pas encore une réunion d'objets ; ou, si l'on se place au point de vue de ces objets, c'est une réunion de propriétés mais en compréhension, relatives aux actions distinctes du sujet sur un même objet, et nullement une réunion en extension.

Néanmoins, les réunions en extension, qui peuvent être elles-mêmes de niveaux bien différents, dérivent de ces formes initiales de réunion en compréhension. Dès les niveaux sensori-moteurs on assiste à des réunions d'objets, mais de caractère spatial : poser un objet sur un autre ou dans une boîte, etc. et ces réunions résultent assurément de coordinations de schèmes au sens que l'on vient de voir. Quant aux réunions constitutives des classes ou des ensembles, qui débutent avec la représentation et consistent à assimiler des objets les uns aux autres et non plus seulement à des schèmes d'action, ces réunions en extension (donc représentatives) constituent à la fois le point de départ de nouveaux morphismes possibles (morphismes entre ensembles) mais aussi, et ceci est utile à rappeler, le résultat de correspondances qui ont été nécessaires pour les engendrer : réunir des objets en une classe c'est retrouver en eux des propriétés communes (par applications ou morphismes) ou des propriétés qui se conviennent et se correspondent donc, mais par ajustements réciproques (les morceaux d'une même totalité infralogique ou méréologique, comme les pièces d'une machine) et, quand on parle d'un ensemble d'objets quelconques, on leur confère néanmoins, de par leur réunion même, une qualité commune due à une mise en correspondance (comme d'être tous sur la même table ou dans le même fond de tiroir, à la manière de Voelin).

Au total entre les formes élémentaires de réunions, par coordination ou assimilation réciproque de schèmes, et les formes supérieures comme l'addition des nombres, il existe une multiplicité de niveaux et il est essentiel pour chacun d'eux de déterminer avec soin à quelles sortes de morphismes les réunions font appel, une correspondance quelconque entre deux objets étant déjà par elle-même une forme de réunion, en pensée ou en graphes, etc.

(6) – Dissociation. Ce coordinateur est le symétrique du précédent, mais n'en devient l'inverse qu'aux niveaux opératoires. Jusque-là, il peut se présenter lui aussi sous des formes multiples et qu'il est important d'analyser du point de vue des processus fonctionnels de différenciations ou de négations.

B – Les coordinateurs précédents ne reposent que sur les relations générales de ressemblances et différences. Les quatre suivants supposent en plus la notion d'ordre, qui distingue les morphismes des simples applications :

(7) – Succession. L'objet B succède à A dans une suite spatiale ou temporelle ou en un simple ordre d'énumération. C'est là un coordinateur fondamental, qui est en jeu dès l'intelligence sensori-motrice (l'emploi de moyens précède l'arrivée au but, etc.) et qui joue un rôle considérable dans les quantifications ordinales des niveaux préopératoires.

(8) – Permutation. C'est le changement d'ordre au sens du combinateur P de Curry.

(9) – Accroissement. Tandis qu'en (7) l'objet B correspond à A en tant seulement que successeur en un ordre quelconque, l'accroissement suppose en revanche qu'il lui succède en tant que comportant quelque chose en plus (plus long, plus lourd, plus foncé, etc.), donc  $\underline{A} < \underline{B}$ . C'est là le point de départ de l'idée de grandeur qui, même dégagée des erreurs de la quantification ordinale (plus loin = plus long), suppose toujours un ordre, donc des morphismes et même on général des fonctions.

(10) – Diminution.  $\underline{B} < \underline{A}$ . Ce n'est l'inverse de (9) qu'au niveau opératoire et la conversion de  $\underline{A} < \underline{B}$  en  $\underline{B} > \underline{A}$  soulève à elle seule toutes sortes de problèmes de morphismes aux niveaux préopératoires, en relation avec la construction difficile des négations.

C – Un troisième ensemble de coordinateurs peut être qualifié d'infralogique mais demeure indépendant de ses multiples utilisations physiques possibles, car les relations spatiales et surtout le continu relèvent encore des activités élémentaires du sujet.

(11) – Direction. Toute action poursuit un but et est donc dirigée vers ce but, ce qui est source de morphismes qui ne sont fondés ni sur la ressemblance ni sur l'ordre lui seul mais sur une dimension vectorielle : à ce but doivent en effet correspondre, soit un chemin unique, soit une pluralité d'intermédiaires possibles (en partie spatiaux et en partie instrumentaux mais nécessairement tous dirigés téléonomiquement). Le coordinateur de direction est donc fondamental et à tous les niveaux, car, même au plan de la pure formalisation, le but poursuivi (démontrer un théorème) peut correspondre à une ou plusieurs voies (choix des axiomes, procédure, de la déduction, etc.).

(12) – Subordination directionnelle ou coordination des moyens. Un but étant donné il peut être atteint par des voies diverses, sans que le sujet différencie les moyens (tendre la main, etc.) et les fins, ce qui est le cas des premières habitudes. Avec l'intelligence sensori-motrice, il y a choix préalable d'un but, puis recherche de moyens. Lorsque ceux-ci deviennent complexes (conduite du support et surtout coordinations instrumentales), de nouvelles correspondances sont à construire pour la compréhension des conditions successives à remplir : le but B implique une condition a, elle-même subordonnée à une condition antérieure b, qui peut à son tour supposer au préalable la condition c, etc. Ce système de conditions hiérarchisées, qui intervient dans les épreuves d'intelligence pratique, comporte alors une composition particulière de morphismes, en forme d'arbres et avec une possibilité de vicariances, le tout préfigurant souvent certaines conduites opératoires (de classification ou de correspondances sériales, etc.).

(13) – Positions. Toutes les conduites directionnelles, jusqu'à un certain niveau qui est (inclusivement) celui des opérations concrètes, comportent, en plus des relations éventuelles de ressemblances et d'ordre, une relation topologique très générale et qui joue un rôle fondamental dans les structurations élémentaires du sujet (de la perception à la manipulation opératoire concrète) : c'est la relation de voisinage antérieure à toute métrique, et son corrélat de séparation (à elles deux elles caractérisent un ordre linéaire ABC si B est voisin de A et de C et que C est séparé de A). Nous appellerons position le coordinateur qui, pour un objet ou un événement quelconques, consiste à les localiser en fonction simplement de leurs voisinages et séparations, sans recourir encore à ces structures d'élaboration bien plus complexes que sont les systèmes de référence spatiaux ou temporels. Il y a là, en effet, une source de multiples morphismes selon des correspondances un à plusieurs ou plusieurs à un (un objet est voisin de plusieurs autres, etc.).

(14) – Déplacement. Enfin un coordinateur de nature également très générale en toute action concrète est le déplacement d'objets, conçu comme un

simple changement de position (dé-placement), indépendamment de toute distance, durée ou dynamique du mouvement. Le déplacement est un coordinateur si primitif qu'il peut paraître ne soulever aucun problème, lorsque le sujet est centré (comme il le reste longtemps) sur les seuls points d'arrivée, les morphismes en jeu se bornant alors à mettre le mobile en correspondance avec ses nouveaux voisinages. Mais les correspondances décisives, au point de vue de la compréhension logique de ce processus, sont celles qui mettent en relation les positions de départ et d'arrivée et notamment la place laissée vide avec la nouvelle position occupée : ce n'est par exemple qu'en concevant les changements de forme (boulette → boudin, etc.) comme le résultat de simples déplacements que le sujet comprendra (et combien tardivement) qu'il y a conservation, du fait que ce qui a été ajouté au point d'arrivée a nécessairement été enlevé quelque part au départ.

Remarque finale. – Les coordinateurs que nous avons cherché à distinguer et à classer n'ont aucun intérêt en eux-mêmes, mais ils semblent montrer (et c'était là le but poursuivi) que les applications et morphismes leur étant attachés procèdent très directement du fonctionnement général des actions, à commencer par les diverses formes de l'assimilation. Il semble donc bien qu'on atteigne ainsi les niveaux que nous comparions en I à ceux des cellules ou des relations intercellulaires. Cet essai d'introduction aux problèmes de l'année vise ainsi avant tout à situer l'échelle des problèmes, mais il n'aborde pas la question principale, qui est celle de la composition des applications ou morphismes entre eux : pour en dire quelque chose de valable il nous faudra plus d'informations de la part de nos logiciens et mathématiciens.