Article publié en 1975 dans
Année psychologique, vol. 75, pp. 23-60.
Version électronique réalisée par les soins de la
Fondation Jean Piaget
pour recherches psychologiques et épistémologiques.
La pagination est conforme à l'original.

RELATIONS ENTRE LES CONSERVATIONS D'ENSEMBLES D'ÉLÉMENTS DISCRETS ET CELLES DE QUANTITÉS CONTINUES

par B. INHELDER, A. BLANCHET
A. SINCLAIR et J. PIAGET

SUMMARY

It was formerly hypothesized in Learning and the Development of Cognition *that the notion of conservation of continuous quantities does not directly derive from the cardinality of object collections. It is the purpose of the present paper to clarify the processes of differentiation and interaction which must be at work. The idea common to all quantitative conservation principles is that a modification of the form (of the collection or the quantity) can be understood as a displacement of elements or parts of the totality, so that what is added at one point is equal to what has been taken away at another. The results of the experiments presented in this paper throw light on the notion of « general commutability » that plays a role in the development of the elementary quantification of continuous object and discrete collections. These results confirm the existence of this notion of commutability as it was already presented in* La contradiction.

Les recherches dont il va être question en cet article sont nées de travaux antérieurs sur l'apprentissage ; ceux-ci avaient montré la complexité plus grande que prévue dans les rapports entre les conservations de totalités numériques et continues, et avaient soulevé de nouveaux problèmes à cet égard (Inhelder, Sinclair, Bovet, 1974[2]). L'hypothèse retenue alors, et qu'il s'agit de vérifier par de nouvelles expériences, est qu'il n'y avait pas

1. 3, rue de l'Université, 1211 Genève (4e).
2. Chap. III, p. 124-125.

de filiation directe entre les deux formes de conservation mais indifférenciation initiale avec inférences mutuelles entre les réactions préconservatoires ; puis il y aurait différenciation graduelle avec interactions progressives, et finalement isomorphisme entre les mécanismes assurant les deux conservations. Cet isomorphisme existerait donc, de façon générale, entre les opérations logico-arithmétiques et infralogiques respectivement en jeu dans ces élaborations mais cependant bien distinctes malgré leur correspondance.

Pour vérifier ces hypothèses il s'agissait d'analyser de près certains processus de compensations susceptibles d'intervenir en toutes les conservations, mais en présentant les données sous des formes qui dégagent ou dissocient explicitement les facteurs à l'œuvre. Par exemple, pour tester le rôle éventuel de la « commutabilité » invoquée par l'un de nous (Piaget et coll., 1974) (voir le § 1), il convenait de ne plus se contenter de chercher à reconstituer la manière dont le sujet interprète les déplacements intervenant dans les changements de formes de la totalité présentée, mais de décomposer le mouvement en deux temps : d'abord enlever un élément ou un morceau de la totalité considérée, puis le replacer, mais en un autre endroit.

De cette manière il devient bien visible, pour le sujet, que le déplacement implique une soustraction au départ et une addition au point d'arrivée, tandis que l'observation d'un simple déplacement laisse les jeunes sujets centrés sur cette seule arrivée.

Une autre compensation étudiée consiste à placer successivement en une première totalité n ou m éléments pendant que l'on pose m ou n dans la seconde de telle sorte que par exemple 2 contre 1 doit être compensé par 1 contre 2 (si $n = 1$ et $m = 2$). Plus précisément, cette expérience s'inspire d'un ancien essai sur la récurrence dû à Inhelder et Piaget (1963) où il s'agissait pour l'enfant de placer un jeton dans un récipient transparent pendant qu'il en mettait un autre dans un récipient en partie masqué : dès 5 ans 1/2 on trouvait des sujets pour prévoir qu'en continuant ainsi indéfiniment les deux collections resteraient égales, car si $n = n'$ on aura « toujours » $n + 1 = n' + 1$. Dans la présente situation, au lieu d'ajouter constamment 1 élément de chaque côté on en met tantôt 1 d'un côté et 2 de l'autre, et tantôt l'inverse, et toujours de manière à conserver la compensation mais sans laisser voir le

résultat : le problème est alors d'établir si le sujet le comprend précocement ou reste longtemps dupe des inégalités momentanées. En cas de compréhension de la compensation entre 2 contre 1 et 1 contre 2, le fait qu'il s'agit d'ajouts successifs revient à appuyer cette compensation sur l'égalité $2 + 1 = 1 + 2$, ce qui est une forme implicite de commutativité, mais inhérente aux actions elles-mêmes sans prise de conscience nécessaire.

Un autre sondage dont il sera question en cet essai consistera, pour une rangée de n jetons occupant toute la longueur d'une feuille rectangulaire étroite, à demander au sujet d'en mettre autant sur une feuille moins longue et plus large. En ce cas la compensation est de nature statique (configurations), mais n'en est pas moins intéressante du point de vue des égalisations numériques à construire et de la forme spatiale des ensembles.

D'autres questions ont porté, chez les plus jeunes sujets, sur les effets respectifs d'adjonctions isolées d'un ou plusieurs éléments et de suppressions également isolées (c'est-à-dire sans que ces deux sortes d'actions soient mises en correspondance ou en compensation), pour voir si les unes et les autres sont censées modifier la totalité et selon des quantités comparables.

On voit que ces diverses expériences visent à comparer les conservations en formation dans les domaines du continu et du discret, en cherchant à analyser les situations dans lesquelles des processus de compensation peuvent se constituer. Les conservations précoces ainsi obtenues en de nombreux cas montrent qu'il valait la peine de tenter ces essais pour mettre en évidence les facteurs en jeu.

1. LA « COMMUTABILITÉ » AU SEIN D'ENSEMBLES DISCRETS

On peut dire que la conservation d'un ensemble d'éléments discrets dont on change la forme spatiale est acquise (et cela est vrai également des quantités continues) lorsque ce changement est attribué à un simple déplacement et non plus à une production dans la direction où il y a accroissement dimensionnel. Mais cette réduction de la conservation à un déplacement implique que ce qui a été ajouté sur un point, soit (+ m) équivaut à ce qui a été enlevé sur un autre, soit (– m) : or, c'est cette soustraction qui fait longtemps problème pour le sujet, parce que les négations ou facteurs négatifs sont de formation plus tardive que les affirmations ou facteurs positifs. D'autre part, une fois assurée la conservation de m en tant que partie simplement déplacée, il en résulte la conservation du tout $m + m'$ où m' représente les éléments non déplacés : c'est pourquoi on peut parler de « commutabilité » pour désigner ce déplacement de m par rapport à m' conservant la somme $m + m'$ et y voir une généralisation de la commutativité $n + n' = n' + n$, qui est aussi une conservation par déplacement, mais linéaire et par simple permutation, tandis que la commutabilité ne comporte pas d'ordre, sinon temporel.

Pour contrôler ces hypothèses, il convenait de centrer l'attention du sujet sur les suppressions ($- m$) et adjonctions ($+ m$) alors que, si l'on se borne à déplacer les objets, l'enfant ne considère que leur point d'arrivée et ne s'occupe pas du fait qu'ils ont été enlevés de quelque position initiale pour être ajoutés ailleurs. Pour obtenir ce résultat, il suffira de présenter deux séries égales de jetons en correspondance optique, par exemple de 5 et 5, et d'enlever un élément de l'une (d'où inégalité constatée de 5 et 4), puis de le rajouter mais à une autre place qu'au début et de demander s'il y a ou non égalité (en fait 5 et 4 + 1), donc conservation. En outre, pour juger des progrès éventuels que cette expérience peut provoquer chez le sujet, il s'agit de soumettre celui-ci à un prétest calqué sur le interrogations habituelles où n'interviennent que des déplacements (ne serait-ce que pour s'assurer que l'enfant n'est pas déjà en possession de la conservation), puis à un post-test analogue pour établir le niveau final atteint à la suite de l'épreuve principale.

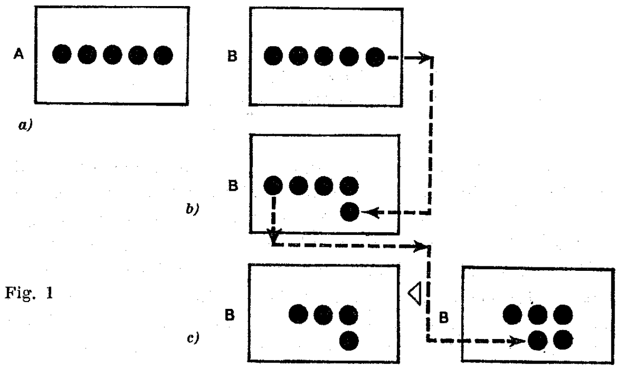


Fig. 1

La technique adoptée débute donc par un prétest : deux rangées en correspondance optique dont les éléments de l'une sont ensuite écartés, puis mis en tas et enfin empilés pour savoir si l'égalité se conserve. Après quoi, si l'enfant n'a pas la conservation on passe aux trois épreuves principales.

I. On place 5 jetons alignés sur une petite feuille rectangulaire A (fig. 1). Au bas de celle-ci est posée une feuille semblable B où l'enfant pose autant de jetons. Après quoi l'expérimentateur enlève un jeton en B et demande s'il y a encore égalité, ce qui est naturellement nié. Puis l'on remet le jeton enlevé, mais en le plaçant autrement (en général en dessous du 4[e] jeton de la rangée restante) et l'on demande au sujet s'il y a autant de jetons sur les feuilles A et B. La réponse une fois obtenue, on procède de même avec un nouveau jeton (ce qui donne en B : 3 jetons alignés + 2 en dessous) et on pose la même question.

II. Dans la seconde épreuve (fig. 2), 5 jetons sont disposés en A comme précédemment mais on ne donne pas d'emblée la feuille B et le sujet place simplement ses 5 jetons sous ceux de la feuille A. On pose alors une feuille B de côté et on déplace un à un les 5 jetons de l'enfant

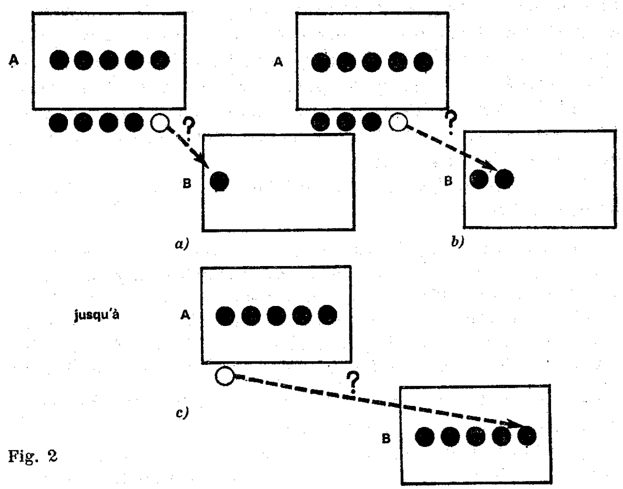


Fig. 2

en les mettant sur la feuille *B* et en demandant chaque fois s'il y a autant en *A* et en *B* : l'égalité finale 5 = 5 ne résulte donc ici que de déplacements, mais analysables dans le détail.

III. Dans cette troisième épreuve (fig. 3) la feuille *A* est munie de 8 jetons en deux rangées de 4 superposées et on demande au sujet de procéder de même sur la feuille *B* placée à droite de *A*. Cela fait, on déplace sur *B* le 8e jeton pour le mettre sous le 7e et on demande s'il y a autant en *B* qu'en *A*. Après quoi on déplace 2 jetons à la fois, puis à nouveau 2, et encore 2, ce qui donne finalement en *B* une colonne verticale de 4 couples superposés à comparer aux deux rangées de 4 en *A*, la question restant toujours celle de l'égalité en *A* et en *B*. Aussitôt après on passe au post-test, identique au prétest.

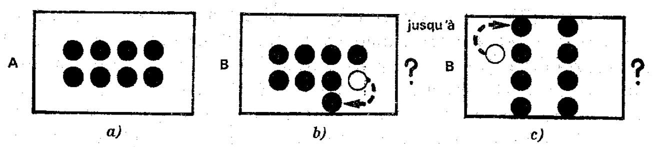


Fig. 3

Les résultats ainsi obtenus semblent clairs. Sur les 13 sujets retenus, 11 échouaient à la conservation au prétest et 2 étaient intermédiaires. Les deux derniers ont passé à la conservation au post-test et sur les 11 autres, 8 ont acquis la conservation et 3 sont devenus intermédiaires. Tous les sujets interrogés ont donc manifesté un progrès. Quant aux épreuves I à III en faisant le compte des diverses réponses et non pas des seuls 13 sujets, on trouve 75 % de réussites, 5 % d'échecs et 20 % de réponses intermédiaires.

Voici d'abord des exemples d'échecs partiels et de réponses intermédiaires :

Vio (5;0) pour 6 et 6 dit que ça fait « *la même chose* » et les compte. Puis, quand on enlève 1 jeton en *B*, elle reconnaît qu'il y en a moins, mais continue de l'affirmer quand on le remet sous le 5e : « *Là* (*B*) *il y a moins.* – Pourquoi ? – *Moi je n'en ai pas ici* (place initiale devenue vide). – Mais tu en as un de plus ici (dessous), moi pas. » Elle maintient son idée et effectivement, après avoir dit 4 et 4 pour deux collections l'une au-dessus de l'autre, elle prétend qu' « *il y en a plus* » en qu'en et conteste qu'il y ait autant à manger.

Ant (5;6) mêmes réactions pour l'épreuve I : « *Vous plus* (en *A*). – Mais tu vois, tu en as un de plus là. – *Oui.* – Alors tout ça (*A*) et

tout ça (*B*) ça fait la même chose à manger ? – *Oui, pas tout à fait.* » Mais ensuite pour les simples déplacements d'un élément sur *B* (sans l'enlever d'abord), il accepte l'égalité.

Quant aux égalités acceptées (donc les conservations) elles sont justifiées par trois sortes d'arguments. Le plus primitif se réfère à l'enveloppement en tant que garant de la permanence du tout enveloppé :

Flo (5;6) après qu'on ait enlevé 2 jetons à 7 et qu'on les ait remis en dessous des 5 restants dit qu' « *on a la même chose parce qu'on a toujours là* » en montrant toute la feuille. Lors des débuts de l'épreuve II : « *On n'a pas la même chose parce que je n'ai rien sur ma feuille* » puis égalité parce qu' « *on a toujours sur la feuille* ». Epreuve III : Flo accepte (sans compter) l'égalité entre 3 rangées superposées de 4 jetons en *A* et 3 rangées très inégales en *B* (2, 3 et 7) « *parce que c'est toujours sur la feuille* », le « toujours » signifiant donc que les déplacements en *B* à partir des 3 rangées de 4 n'ont pas fait sortir les jetons des frontières. Or, au post-test, lorsque l'on espace les éléments d'une rangée plus serrée ou qu'on les met en tas, Flo conserve son argumentation bien qu'il n'y ait plus de feuille : « parce que c'est toujours la même chose sur la table ».

Il est clair que de tels raisonnements tiennent implicitement compte des déplacements, y compris les actions d'enlever et remettre, mais le seul facteur explicite est la permanence de l'enveloppant, donc de la feuille, en tant que garant de la conservation de la somme des éléments. Or, cette garantie est illusoire dans le cas de l'épreuve I, puisqu'on pourrait remettre sur la feuille plus ou moins de jetons qu'on en a enlevés. D'où le progrès marqué par le second argument, qui se réfère à ces suppressions et adjonctions ou réintroductions :

Pao (6;0), nettement préconservatoire au pretest dit, à l'épreuve I : « *C'est la même chose, vous n'avez pas enlevé un.* » Après quoi on enlève un jeton en *A* en donnant à l'ensemble une forme analogue à celle des jetons en *B* « Ça n'est pas la même chose. – (divers déplacements) ? – *Non.* – (On enlève 1 en *B*.) – *C'est la même chose.* – Comment tu sais ? – *Parce qu'avant vous n'en avez pas enlevé et on savait que c'était la même chose.* »

Xyz (5;6) Epreuve I : « *On n'a pas pris* (= on a remis). » Epreuve II : « *Parce que d'abord je n'avais rien, puis de plus en plus et ça faisait la même chose.* »

Le progrès est donc net en tant que faisant appel à des opérations additives et à l'équivalence ou la compensation entre les suppressions et les adjonctions, ce qui constitue l'un des caractères de la commutabilité. Mais sa propriété fondamentale, source de ces compensations, est l'invariance ou la conservation du mobile au cours du déplacement. Or c'est cette propriété qui est invoquée par la troisième sorte d'arguments :

JAS (5;6), également non-conservatoire au prétest, dit à propos de l'épreuve I : « *On a la même chose, mais avant* (lors de la soustraction) *il y avait 1 de plus* (en *A*) *et on l'a remis* (argument 2). Epreuve III (déplacements) : « *C'est la même chose, mais les deux ne sont pas mis au même endroit.* »

DOM (5;8) : « *C'est toujours la même chose.* – Comment tu sais ? – *Parce qu'avant c'était comme ça* (montre les positions), *maintenant c'est comme ça, mais c'est la même chose.* »

FAT (6;0) à chaque déplacement (épreuves I et III) dit : « *On a toujours la même chose parce que c'est toujours les mêmes.* »

L'identité invoquée par Fat n'est plus cette identité qualitative qui fait dire aux jeunes sujets (lors d'un transvasement de liquide) « c'est la même eau », alors qu'ils admettent cependant qu'elle a varié en quantité : il s'agit ici, lors de chaque déplacement, de la conservation des éléments déplacés, donc, par le fait même, de celle du tout. Jas et Dom insistent également sur le fait qu'un changement de position ne modifie pas les quantités. Les arguments 2 et 3 se réfèrent ainsi clairement à la commutabilité ; joints aux progrès signalés chez 8 sur 11 sujets lors du premier post-test, ils nous paraissent donc prouver le rôle de celle-ci dans la formation de ces conservations précoces. Ajoutons qu'après quelques semaines on a présenté un second post-test, identique au premier, et les résultats ont été les mêmes : il y a donc là un indice de stabilité, mais ce n'est qu'un indice car nous ne savons rien des progrès spontanés qui auraient pu se produire durant cette période indépendamment de nos épreuves.

2. CONTRE-ÉPREUVE A PROPOS DU ROLE DES DISPOSITIONS SPATIALES

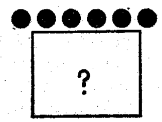
Les épreuves habituelles de conservation des ensembles nous ont assez montré que n'importe quel changement de disposition spatiale modifiant la correspondance optique (terme à terme en

situations proches des deux rangées à comparer) conduit à contester l'équivalence initialement admise, même lorsqu'il ne s'agit que de 5 ou 6 éléments il suffit d'espacer ceux-ci, de les mettre en tas, d'isoler un jeton par rapport à la rangée, pour entraîner une non-conservation. Le § 1 nous a montré, par contre, qu'en remplaçant ces simples déplacements par une double action – enlever un élément, puis le replacer en un autre endroit de l'ensemble – on favorise l'invariance de l'équivalence.

Il nous a donc paru intéressant d'examiner une vingtaine de sujets de 4-5 ans dans une situation où ils seraient conduits par leurs propres actions à construire une équivalence entre 6 et 6 jetons, mais avec changement obligé de position d'un ou de deux éléments entre les deux ensembles et cela sous une forme analogue à celle que l'on a vue au § I mais cette fois sans référence aux déplacements.

La technique adoptée est extrêmement simple (fig. 4). On présente au sujet une rangée de 6 jetons légèrement espacés et une feuille de papier rectangulaire, mais dont le grand côté ne correspond qu'à l'intervalle entre les jetons 2 et 5 de la rangée en dessous de laquelle est placée cette feuille. On demande alors sans plus au sujet de mettre sur cette feuille autant de jetons (« mets la même chose de jetons » ou « la même chose beaucoup », etc.) qu'il y en a dans la rangée. Une variante

Fig. 4



introduite comme contrôle a consisté à procéder de même en utilisant une feuille rectangulaire étroite et de grand côté égal à la longueur de la rangée donnée, mais légèrement décalée : le côté gauche de la feuille est placé sous le n° 2 de la rangée et le côté de droite dépasse le n° 6 d'une unité de longueur (intervalle entre les jetons).

22 sujets ont été interrogés : 16 de 4 ans, 6 de 5 ans, et dont aucun, lors des prétests, n'a donné d'argument opératoire de conservation.

A) Sur ces 22 sujets, 13 ne parviennent pas à dépasser la solution consistant en une rangée de 4 sur la feuille (fig. 5), soit qu'ils croient alors à une équivalence, soit qu'ils jugent le problème insoluble :

AGA (4 ans), pour copier la rangée modèle, commence par couvrir les papiers de jetons serrés (9) mais constate alors que cela fait « *plus à manger* ». « Comment faire pour avoir la même chose ? – *Il faut enlever* (elle fait alors une rangée de 4). – Comme ça on mange la même chose – *Oui* (elle sait cependant compter). »

FRA (4;5) met un alignement de 4 sur la feuille et y voit une équivalence, alors que sur la table elle donne une correspondance exacte.

LAE (4 ans) n'en place que 3 sur la feuille et reconnaît que ce n'est pas pareil. « Quoi faire ? – *Comme ça* (fait une rangée correcte sur la table). – Mais sur le papier ? – (Il ajoute un 4e jeton). – On a la même chose comme ça? – *Oui.* »

EVE (4;6) n'en met aussi que 3. « Je voudrais la même chose. – *On*

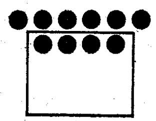


Fig. 5

ne peut pas. – Tu ne peux pas sur le papier ? – (Elle rajoute alors un jeton à chaque extrémité des 3 mais en le plaçant moitié sur le papier moitié sur la table. – Mais pas sur la table. – *On ne peut pas.* »

PAC (5 ans) part d'une rangée de 4. Il fait l'essai d'en rajouter un en dessous du n° 4 mais ne trouve pas cela correct et le met à côté du papier dans le prolongement de sa rangée. « *Il faut en mettre un sur la table.* – Tu ne peux pas sur le papier? Il y a de la place. – (Il en ajoute alors 2 comme Eve, à moitié sur le papier, à moitié sur la table). »

BER (5 ans) met d'emblée une rangée de 4 sur la feuille mais estime que cela ne fait pas pareil. « Alors quoi faire ? – *Les enlever* (elle fait une rangée de 6 sur la table). – Et ici ? – (Recommence à 4). »

NAD (5 ans) n'en met d'abord que 3 et tient à la main un 4e, mais, avant de l'ajouter, déplace les 3 premiers en vérifiant chaque fois que l'intervalle entre deux jetons soit le même que sur le modèle. Elle admet alors l'équivalence (4 contre 6 !).

TAL (5 ans) fait une rangée de 5 mais reconnaît qu'elle n'équivaut pas aux 6 du modèle. – Quoi faire ? – … – On ne peut pas le faire sur le papier pour avoir la même chose ? – *Non.* – Et comme ça (on rajoute un en dessous) ? – *Non, ça ne fait pas la même chose.* – Qui a plus comme ça ? – Là (5 + 1 plus que 6) », mais quand on l'enlève cela fait moins : « *Non c'est ici* (5) *qu'il y a moins.* »

ISA (4;5) de même, lorsqu'on propose de rajouter 2 jetons au-dessus des 3 qu'elle a mis (pour en reproduire 5 et pas 6) répond : « *Non* (= ce n'est pas égal) *parce que là c'est une ligne et là pas comme une ligne* », ce qui donne alors plus comme chez Tal.

Ces faits (13 cas sur 22) sont instructifs quant à la nature de la quantité totale, à ce niveau préopératoire où les opérations logico-arithmétiques (classes, relations et nombres fondés sur les équivalences ou différences entre éléments discrets) ne sont pas encore différenciées des opérations infralogiques fondées sur les voisinages ou séparations entre morceaux d'une totalité continue. En ce cas le nombre des éléments n'est pas ou pas seulement évalué en fonction de leur somme, mais encore (et cela à titre de condition nécessaire et souvent suffisante) par la nature de leur enveloppement[1].

A cet égard une rangée de jetons constitue déjà un enveloppement, quoique linéaire, dont les jetons individuels ainsi que les intervalles qui les séparent constituent l'enveloppé et dont la forme générale de la rangée, y compris (nécessairement) sa longueur, représentent l'enveloppant : il suffit alors, entre autres, d'espacer les éléments, donc de modifier la longueur de la rangée pour que la quantité change au point de vue du sujet.

Cela rappelé, il est clair que le problème soumis au sujet est complexe, puisqu'on lui impose un nouvel enveloppant (la feuille), dont il s'agit de respecter les frontières, ce qui empêche de maintenir tels quels les caractères de l'enveloppant-modèle, donc d'une rangée linéaire. En ce cas, sauf pendant un instant, Aga qui commence par couvrir toute la feuille, tous les sujets cherchent à conserver l'enveloppement ou forme totale de type « rangée », et encore en respectant avec soin les intervalles entre les jetons du modèle (voir Nad) il en résulte alors une rangée de 4 jetons sur le grand côté de la feuille sans que l'enfant cherche à utiliser la place qui reste libre. Mais l'interprétation du résultat de cette action varie selon trois possibilités. La plus élémentaire consiste à admettre que cette rangée de 4 équivaut (« même chose à manger ») à celle du modèle, puisqu'il s'agit encore d'une rangée et qu'on ne peut pas la faire plus

1. Nous appellerons « enveloppement » tout système total dans lequel on peut distinguer un « enveloppant » (ou enveloppe) et des « enveloppés » ou contenus, de même que le terme de « signification » désigne le « signifiant » joint au « signifié ». Mais il importe d'emblée de noter que l'enveloppant peut être spatial (continu, donc infra-logique) ou simplement conceptuel (classes ou nombres, donc logico-arithmétique) et que nous distinguerons les enveloppements préopératoires, tous en partie infralogiques même lorsqu'il s'agit de rangées numériques ou de préclasses (collections figurales, etc.) et les enveloppements opératoires, où l'enveloppant correspond à la somme des parties même lorsqu'il change de forme.

longue : la similitude des enveloppants prime alors et est censée assurer celle des enveloppés (par un prémorphisme de surjection, mais avec négligence de sa réciproque que nous appelons multijection en tant que correspondance de un à plusieurs)[1].

La seconde attitude consiste à reconnaître qu'il n'y a pas égalité et à vouloir la réaliser sur la table (ce que chacun de ces sujets sait faire), sans plus de souci de la feuille : lorsqu'on demande le respect de la consigne, l'enfant s'en tire alors par un compromis consistant à ajouter 2 jetons aux 4, mais chacun des deux extrêmes de la rangée des 4, moitié sur la feuille, moitié sur la table (Eve et Pao (fig. 6)). Un autre compromis

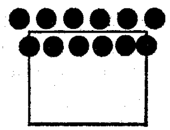


Fig. 6

a consisté à serrer 5 jetons et à en poser sur la même ligne un 6e, mais vertical. La troisième interprétation, qui est la plus évoluée, consiste à nier que le problème puisse être résolu (Eve à la fin, et surtout Tal). Tal nous en donne explicitement la raison, et elle éclaire tout ce qui précède : c'est que si l'on place le 6e élément (Tal en a posé 5) en dessous de l'un des autres « cela ne fait pas la même chose », donc la même quantité totale : 5 + 1 font plus que 6 puisqu'il y a alors deux sous-collections (5 et 1), mais 5 fait moins que 6, d'où l'impossibilité d'une solution (même réponse chez Isa). Or, les réactions, et surtout les dernières, fournissent la contre-épreuve de ce que l'on a vu au § 1. Quand, pour une même rangée, on enlève un élément pour le replacer ensuite mais en dessous, les sujets admettent facilement la permanence du tout, car la réintroduction du jeton enlevé, même en modifiant sa position, donc en le déplaçant, apparaît comme une compensation de la suppression initiale, du fait qu'il y a là deux actions coordonnées et inverses l'une de l'autre. Dans le présent cas, en plus des facteurs d'enveloppement discutés plus haut, le fait de changer la position d'un ou deux éléments, donc de les déplacer par rapport à la série modèle, n'est pas conçu comme une compensation : le déplacement

1. Pour la définition de ces termes voir le § 7 B.

modifie alors la quantité et est interprété explicitement par Tal comme une production puisque 5 + 1 font plus que 6. C'est ce que l'on observe lors de toutes les non-conservations, tant que les déplacements ne sont pas compris comme n'ajoutant au point d'arrivée que ce qui a été enlevé au départ.

B) Si l'on examine maintenant les sujets qui dépassent les réactions précédentes, sans parvenir à la correspondance exacte ou en y parvenant, ii est intéressant de suivre leurs tâtonnements qui montrent éloquemment, quoique de façon différente, la difficulté du problème posé, lorsqu'il ne s'agit que de changements de positions et non pas de suppressions et de réintroductions pouvant se compenser, donc d'une action indifférenciée et non pas de deux actions réciproques.

Voici d'abord des sujets qui renoncent à s'en tenir à une rangée de 4 mais en ajoutent alors plus qu'il n'en faut, comme pour compenser la perte de l'ordre linéaire :

Man (4 ans) aligne 4 jetons au haut de la feuille et reconnaît l'inégalité. Il rajoute alors 3 éléments en dessous alors que le modèle n'en a que 5 : « On a la même chose ? – *Oui.* » On ajoute 2 jetons de plus au modèle et il en met 4 de plus sur la feuille, d'où 12 contre 7 : «*Il en faut très beaucoup.* »

Fat (4 ans) fait une rangée de 5 et accepte qu'on en rajoute 1 en dessous, puis en accepte 2 et croit à l'égalité. On vérifie par correspondance sur la table : « *Il en reste 1* (7 contre 6). – Et là (sur la feuille avec encore 7) c'était juste ? – *Oui.* »

San (5;6) pour le modèle de 6 ne met que 4 sur la feuille. On double alors la longueur de celle-ci et il met correctement 6 contre 6. On revient à la forme trop courte et San en met 4 puis en rajoute 3 puis encore 1 : « On a les deux la même chose ? – *Je ne sais pas encore.* – Comment savoir ? – *Il faut les compter : 6 et 9* (= 8 en fait). – Quoi faire ? – *Il faut un petit peu les pousser.* »

Raf (5;8) met d'emblée deux rangées de 4 pour remplir toute la feuille et affirme l'égalité, mais prétend ne pas savoir compter.

Mic (5 ans) de même fait deux rangées de 3 pour un modèle de 5 et, afin d'assurer l'égalité en rajoute un 7e !

Voici maintenant des cas de réussites ou demi-réussites finales :

Dom (4;6) met comme Rai deux rangées de 4 en couvrant la surface, mais en enlève ensuite 2.

Luc (4 ans) pour un modèle de 5 fait une rangée de 3 occupant toute la longueur de la feuille. « On a la même chose ? – *Non.* – Quoi faire ? – *Comme ça* (il enlève le dernier jeton du modèle et le met en dessous des 3). »

Ola (4;6) pour conserver le caractère linéaire du modèle aligne 4 éléments en une colonne verticale à gauche et ajoute 2 jetons à droite du plus bas ce qui donne un angle droit (fig. 7).

Ale (5;5) fait mine de déplacer les deux jetons extrêmes du modèle de 6, puis rajoute 1 élément sous chaque extrême de sa rangée de 4, ce qui donne la figure 8, avec correspondance exacte.

Xal (5 ans) fait une rangée de 4 puis déplace les deux jetons extrêmes du modèle pour les mettre au-dessus des 4 autres et ajoute alors sur la feuille 2 nouveaux jetons en dessous des 4 autres, d'où une correspondance correcte avec symétrie (fig. 9).

Val (6;0) est le seul sujet qui pose d'emblée 4 jetons alignés et 2 en dessous, sans y voir de problème : « *J'ai copié ceux de la table* (le modèle). »

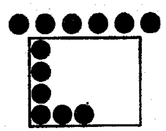


Fig. 7

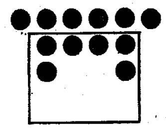


Fig. 8

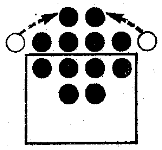


Fig. 9

On voit que les sujets Man à Rai, en progrès sur les précédents, renoncent à se contenter d'une seule rangée (de 3 ou 4) sur la feuille et placent d'autres jetons en dessous. Mais, du fait que la série modèle est conçue comme un enveloppement, quoique linéaire, puisqu'elle occupe tout l'espace entre les frontières initiale et terminale, ils ont tendance à croire que le nouvel enveloppant (la feuille) doit aussi être rempli ou du moins garni « très beaucoup » pour être équivalent au modèle. Parmi les sujets qui réussissent finalement, Dom débute de même, mais enlève ensuite ce qu'il y a de trop (cf. Aga sous 2A). Les autres cherchent différents moyens pour conserver le plus possible la forme du modèle, jusqu'à modifier celui-ci (Luc) ou à établir diverses symétries (Xal) ou encore deux suites linéaires contiguës (Ola). Seuls Alé et Xal font appel à des déplacements avec implicitement une relation entre ce qui est enlevé et remis et ce n'est que chez le sujet de 6 ans (Val) qu'un changement de position ne pose plus de problème et reste qualifié de « copie » du modèle.

Quant à la variante consistant à utiliser une feuille rectangulaire mince de même longueur que le modèle mais décalée d'une unité (fig. 10), le problème est en général résolu mais les plus jeunes sujets mettent davantage de jetons sur cette feuille, donc plus de 6 (fig. 11), sans doute aussi pour compenser l'absence de correspondance optique par simples superpositions.

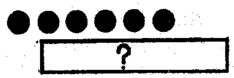


Fig. 10

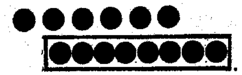


Fig 11

3. QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES ADJONCTIONS ET SUPPRESSIONS

La commutabilité consistant en la conservation d'un tout lorsque ses éléments sont conçus comme simplement déplacés malgré les changements de forme – ce qui est ajouté d'un côté étant enlevé de l'autre –, il était intéressant de rechercher ce que les sujets pensent du rôle des suppressions et adjonctions en général. Cela était d'autant plus indiqué que le § 2 vient de nous rappeler combien les jeunes sujets demeurent loin de comprendre que les changements de forme et de position conservent la quantité totale en tant que dus à de simples déplacements avec compensation entre les places laissées vides et les places occupées.

Les questions posées ont simplement consisté à demander si l'équivalence se conserve entre deux rangées lorsqu'on enlève ou qu'on ajoute un élément à l'une d'elles, et cela soit à l'intérieur de la série soit à l'une des extrémités. Mais il va de soi que si on laisse un trou là où un élément a été enlevé et un dépassement là où il a été ajouté, les réponses en sont trop facilitées : il importe donc ensuite de redonner aux séries des dispositions comparables pour voir ce qui reste des inégalités numériques introduites. On peut distinguer en ce cas trois niveaux successifs.

Le niveau le plus bas est celui des sujets qui, à longueurs égales, croient que les adjonctions ou suppressions ne modifient pas les quotités, tandis que tout dépassement d'une rangée indique une valeur supérieure :

LER (6;0). Deux rangées de 6 (la seconde construite par le sujet). On ajoute 1 jeton à l'une : « Même chose ? – *Quelqu'un a plus*. – Et ça (on a rétabli les longueurs égales et on met un de plus au milieu) ? *Même chose*. – Si on en mangeait un quelqu'un aurait plus ? – *Même chose*. – (La rangée de dessous étant complétée on a 8 = 8 et on enlève 1 et on laisse le trou) Et ça ? – *Même chose*. »

Le second niveau est plus intéressant du fait que les quotités ne sont plus évaluées simplement à la longueur des rangées :

ISA (4;5) dit : « *Moi je mangerais plus*. » Si sa série est augmentée d'un jeton qui dépasse, mais pour 4 éléments intercalés un à un à l'intérieur de la rangée elle dit chaque fois : « *Toujours la même chose*. » Par contre, pour deux rangées égales il suffit d'enlever 1 élément pour que ce ne soit « *plus la même chose* ». *A fortiori* pour 2 suppressions même en égalisant les intervalles.

ROV (5 ans) de même dit « *la même chose* » quand on intercale un jeton à longueurs égales des rangées (mais pas en cas de dépassement) ; par contre « *c'est moi qui ai plus* » quand on enlève un élément à l'autre rangée. On revient à une intercalation en l'une des deux séries de 6 (donc 7 > 6) : « *Même chose*. »

L'intérêt de ces cas est qu'une suppression est comprise comme altérant la quantité totale de l'ensemble, tandis qu'une intercalation ne le modifie pas et en conserve la nature de totalité fermée. On a trouvé la même réaction, assez systématique, dans une expérience suggérée par les recherches de R. Carreras sur l' « infinitésimal »[1] : étant donné un empilement de feuilles de papier très fines, une adjonction ne change pas sa hauteur, tandis qu'une seule suppression la modifie déjà, selon le sujet qui ne perçoit naturellement aucune différence.

Le troisième niveau est celui des réponses correctes :

SAN (5;6). On ajoute 1 au milieu de l'une des deux rangées de 6 : « *Quelqu'un a plus*. » – Et pour une suppression : « *Quelqu'un a moins*. » Idem plusieurs fois.

Cela dit, il reste à examiner ce que donnent les compositions d'adjonctions et de suppressions, pour voir si elles portent sur les nombres eux-mêmes ou simplement sur les actions comme telles, indépendamment des quotités. Bien faciles dès la conservation des quotités, ces compositions font problème aux niveaux précédents :

1. En préparation.

LUC (4 ans), pour deux rangées de 6. On en enlève 1 : « Ça fait la même chose à manger ? – *Non*. – (On le remet) Même chose dans les deux ? – *Non*. – (On en rajoute 1) ? – *Non*. – (On rajoute le second) ? – *Non*. – (On les enlève tous deux) ? – *Non*. – Regarde bien. – *Non, pas la même chose*. »

DOM (4;6) pour 6 et 6 : On rajoute 1 à la série toute faite : « Quelqu'un mange plus? – Vous. – (On en rajoute un autre) ? – Encore vous. – (On enlève 1 de ceux qui ont été rajoutés). Qui mange plus ? *Moi* (alors qu'il en a 6 et l'autre 7). »

Il est clair qu'en ces cas le sujet se centre sur les actions elles-mêmes, chacune considérée à l'état isolé : ajouter revient à augmenter la quantité et enlever à la diminuer, indépendamment des valeurs en jeu, donc du résultat de l'action précédente. Ce qui manque est donc la compensation, contrairement aux réussites précoces du § 1, parce qu'alors l'élément enlevé faisait un trajet visible et était posé à un endroit différent, le déplacement avec changement de forme obligeant le sujet à coordonner la diminution ou suppression initiale d'un élément ou de deux avec leur réintroduction au terme de ce déplacement. Dans les présents cas au contraire, il n'y a pas encore de commutabilité faute du déplacement continu qui relierait les deux actions, et celles-ci prennent de ce fait une valeur absolue et indépendante des quotités en jeu.

Ces quelques faits, et notamment les deux premiers niveaux, montrent une fois de plus le rôle de l'enveloppement préopératoire dans l'évaluation des quantités. Mais il faut soigneusement le distinguer de l'enveloppement opératoire, dans lequel le tout égale la somme des parties avec conservation malgré les changements de forme, deux caractères qui font défaut auparavant. Notre problème étant d'interpréter le passage de l'un à l'autre nous avons fait au § 1 l'hypothèse que cette transformation était due à la commutabilité en tant que les changements de forme sont compris comme ne résultant que de déplacements, mais avec compensation entre ce qui est enlevé au départ et ajouté à l'arrivée, d'où la conservation. Le progrès général observé avec la technique du § 1 a semblé confirmer cette supposition. Le § 2 en a fourni une contre-épreuve, puisque les positions finales des jetons (rajouter des éléments en dessous de la série incomplète) sont analogues dans les deux techniques, mais au § 2 sans référence à des suppressions ou adjonctions : d'où plus de la moitié d'échecs chez les sujets sans conservation, quelques semi-réussites et peu de réussites complètes.

En ce § 3 la situation est inverse : intervention de suppressions ou adjonctions, mais sans référence à des déplacements. En ce cas la question est plus facile que celle du § 2 (deux tiers de réussites chez les sujets sans conservation et un tiers d'échecs), mais on ne peut pas parler de progrès au sens du § 1.

4. LES RELATIONS D'ORDRE

Il nous reste à étudier, dans le domaine des ensembles discrets, le rôle éventuel de l'ordre des positions, ce qui distingue la commutabilité, étrangère à ce facteur, de la commutativité stricte comportant une inversion de l'ordre linéaire des éléments.

A) Une question préliminaire a consisté simplement à faire « commencer par l'autre bout », autrement dit permuter, une suite de 5 jetons dont les 3 premiers sont bleus et les deux autres rouges. Sur 14 sujets de 4-5 ans, 5 réussissent sans problème, 2 après tâtonnements, mais les 7 autres ont des réactions différentes. Les unes reviennent à remplacer la permutation par une symétrie :

DOM (4;6) place 3 rouges sous les 3 bleus et 2 bleus sous les 2 rouges, ce qui revient donc à permuter les couleurs et non pas l'ordre 3 + 2.

TIM (4 ans) met 2 bleus suivis de 3 rouges, par renversement des nombres et non pas de l'ordre.

D'autres consistent à réduire la commutativité (2 + 3 = 3 + 2) à une simple commutabilité avec déplacements quelconques :

NAT (5 ans) commence par 1 bleu suivi de 1 rouge, puis de 2 bleus et finalement de 1 rouge, ce qui conserve les nombres, mais en ordre panaché.

VAL (6;0) donne 1 rouge suivi de 3 bleus et à nouveau de 1 rouge.

Les échecs restants ou les demi-réussites n'ont d'autre intérêt que de montrer la difficulté de l'inversion de l'ordre :

ISA (4;6) ne peut que recopier le modèle.

PAC (5 ans) commence bien par un rouge mais lui en ajoute 4 autres sans plus s'occuper des bleus.

CAR (4 ans) prétend ne pas pouvoir commencer dans l'autre sens et il faut qu'on lui pose son premier jeton pour qu'elle continue, mais elle s'arrête au milieu parce que « *c'est pas la même couleur* ».

LAF (4;5) et NAD (5;0) ont besoin de trois copies avant de pouvoir inverser l'ordre.

On voit ainsi que l'inversion demandée est loin de conduire à une réussite unanime, même dans un cas aussi simple. Lorsque dans une série impaire tous les éléments sont différents, les sujets de ce même âge débutent en général correctement pour établir l'ordre inverse mais, parvenus au médian, ils perdent la direction (Piaget, Inhelder, 1948). Dans le cas de 8 réglettes de longueurs distinctes, il faut attendre le niveau opératoire pour que le sujet comprenne que le nombre des éléments > 1 est nécessairement égal à celui des < 8 (Piaget, Liambey et Papandropoulou, *en prép.*). En un mot, les deux ordres de parcours ne sont différenciés et coordonnés que très progressivement, ce qui empêche de parler de commutativité au niveau ici considéré.

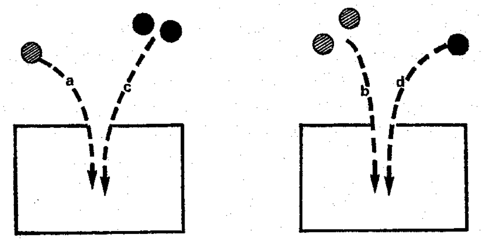


Fig. 12

B) Il importe de se rappeler ce fait pour l'interprétation des réussites spectaculaires à l'épreuve suivante. On offre à l'enfant deux boîtes en métal, fermées mais munies d'une ouverture par laquelle l'expérimentateur introduit des jetons, qui restent invisibles une fois entrés, mais qui produisent chacun un son en tombant sur le fond. On présente ainsi soit des équivalences (1 rouge + 2 bleus = 2 rouges + 1 bleu (fig. 12) ou 2 + 3 = 3 + 2), soit des non-équivalences (2 + 3 ≠ 2 + 2, etc.), les deux situations étant naturellement mélangées. La question est d'établir s'il y a ou non autant de jetons dans les deux boîtes, sans s'occuper des couleurs, visibles à l'entrée et dont les inégalités correspondent simplement à des rythmes différents tac-tac… tac ou bien tac… tac-tac. Il ne s'agit donc en fait que d'évaluer le nombre des sons entendus, mais différemment groupés (2 + 1 ou 1 + 2), chaque enfant ayant à répondre à 6 ou 7 de telles questions. Mais, une fois les réponses obtenues, on ouvre les boîtes et on demande à nouveau s'il y a équivalence ou pas, donc cette fois sur inspection visuelle et non plus selon les sons entendus lors des entrées visibles.

Or, sur 9 sujets de 4-5 ans en possession de la conservation, 7 réussissent toutes les épreuves (ou toutes sauf une) et 2 échouent à deux, trois ou plus ; et sur 12 sujets ne la possédant pas, 10 réussissent de même et 2 seulement échouent. Par contre, lors des comparaisons visuelles à boîte ouverte, les réponses sont moins bonnes, sans donc que les jugements d'équivalence ou d'inégalité visuelles correspondent toujours aux réponses précédentes justes données sur les sons.

Voici des exemples d'erreurs :

DOM (4;6) réussit pour 2 rouges et 2 bleus : « On a la même chose dans les deux boîtes ? – *Oui, 2 et 2*. – Et comme ça (2 + 3 et 3 + 2) ? – *Là il y a plus et là pas beaucoup*. – On va voir. – (Il compte). – Et comme ça (1 + 2 et 2 + 1) ? – *Plus là, et là pas beaucoup*. – On va voir. – (Il compte, très surpris.) *Avant il y en avait 4* (pour 1 + 2). *Comment ils disparaissent ?* – On essaie encore ? (2 + 1 et 1 + 2) ? – *Là 4 et là 3*. – On va voir. – *Il y en a un qui a disparu !* »

NAT (5 ans). « (1 et 1). – *Un !* – (1 + 1 et 1 + 1). – *Chacun deux*. – (1 + 1 + 1 et 2 + 1). – *Pas la même chose* (mais les rythmes sont ici différents). – Qui a plus ? – *Moi* (2 + 1). – (On ouvre.) Tu vois ? – *Non pas la même chose*. (1 + 2 et 2 + 1). – *C'est moi qui a plus* ».

SAN (5;6). « (1 et 1). – *Même chose*. – (2 + 1 et 1 + 2). – *Moi j'ai plus*. – (On ouvre). – Même chose (surprise !) – (2 + 3 et 3 + 2). – *C'est moi qui a plus*. (On ouvre). – *Non, c'est vous*. – (1 + 2 + 1 et 1 + 1 + 2). – *C'est moi qui a plus*. – (2 + 1 et 1 + 2). – *Moi je mange moins*. – (On ouvre). – *Même chose* / – Comment j'ai fait ? – *Vous avez pris le contraire (couleurs)*. »

Et de réussites :

FAT (4 ans). « (1 et 1). – *Même chose*. – (1 et 2). – Non. – Qui a plus ? – *Moi*. (3 + 2 et 2 + 3). – *Même chose*. – Montre-moi (on découvre). – (N'arrive pas à compter). – (1 + 2 + 2 et 2 + 1 + 1). – *Non*. –. Qui a plus? – *Vous*. »

ANA (4;6) réussit de même pour (1 et 1), (2 + 1 et 1 + 2), (2 + 3 et 3 + 2) et ne se trompe qu'en un cas.

Mic (5 ans) se trompe d'abord sur 2 + 1 et 1 + 2. Puis « (2 + 2 et 2 + 1). – *Pas la même chose*. – Qui a plus? – *Vous*. – (2 + 3 et 3 + 2). – *Même chose*. – Comment tu sais ? – … – (2 + 2 et 2 + 1). – *C'est vous qui avez plus*. »

Que ces jeunes sujets reconnaissent un même rythme (comme 1 + 1 et 1 + 1) ou s'embrouillent quand il est différent (comme Nat pour 1 + 1 + 1 et 2 + 1) n'a rien de surprenant. Mais l'intérêt de ces résultats est la réussite précoce pour les inversions d'ordre (2 + 1 et 1 + 2 ou même 3 + 2 et 2 + 3) ainsi que leurs jugements corrects en cas de non-équivalence. Malheureusement l'enfant reste muet lorsqu'on lui demande « comment tu sais » (voir Mic) et la seule indication verbale est celle de San en présentation visuelle et en réponse à la question « comment j'ai fait ? » « Vous avez pris le contraire », dit-elle, et il ne s'agit évidemment pas d'une inversion de l'ordre puisque les jetons sont alors mélangés : le « contraire » c'est donc la symétrie des couleurs (2 bleus et 1 rouge contre 2 rouges et 1 bleu), correspondant à la symétrie des rythmes (tac-tac… tac et tac… tac-tac). Même si les actions en jeu font intervenir implicitement une compensation par commutativité, ce que le sujet en retient n'est sans doute pas cette inversion de l'ordre (on a vu sous I ses difficultés) mais semble se réduire à leur symétrie, c'est-à-dire à une correspondance bijective avec renversement. Or, celui-ci est essentiellement figuratif et tient aux résultats perçus, indissociables des actions comme telles. Inutile de rappeler combien est fréquente cette utilisation de la symétrie aux niveaux préopératoires, et cela jusque dans les situations où elle précède de beaucoup la compréhension des mécanismes en jeu (exemple l'équilibre d'une balance, lorsque le sujet met des poids égaux aux deux extrémités du levier sans encore se douter qu'ils agissent l'un sur l'autre). Par contre, les recherches de P. Gréco (1962) sur la commutativité ont montré son caractère tardif et opératoire. En revanche, il semble bien que la simple commutabilité, toujours liée aux déplacements, mais suivant un ordre quelconque des positions, puisse se constituer, en certains cas privilégiés, à tous les niveaux, y compris sensori-moteur : la permanence de l'objet, par exemple, suppose que le sujet mette en relation les arrivées avec des départs et que, voyant une balle rouler sous un canapé, il ne cherche plus à la retrouver sous le fauteuil où elle était située l'instant auparavant. Autrement dit, à la présence en situation finale correspond une absence en situation initiale, contrairement à ce que croit d'abord le bébé. Mais si ce mécanisme constitutif des invariances semble clair dans le domaine du discret, il nous reste à l'analyser dans celui du continu.

5. LA COMPOSITION D'UN CONTINU A PARTIR DE MORCEAUX

Dans l'épreuve connue où l'on transforme une boulette de pâte en boudin (Piaget, Inhelder, 1941), le sujet préopératoire voit bien que ce changement de forme implique des déplacements. Mais il conçoit ceux-ci comme s'accompagnant de productions (augmentation de la quantité de matière), tandis que pour comprendre la conservation il doit avoir admis que ce qui est ajouté sur un point à l'arrivée a forcément été enlevé sur un autre (quelconque) au départ. Pour analyser cette commutabilité dans le continu, nous avons d'abord eu l'idée de former la boulette initiale au moyen de morceaux de pâte de différentes couleurs, de façon à ce que, en les fusionnant, l'enfant constate visuellement certains déplacements au lieu de se borner à les produire manuellement. L'expérience a été instructive : sur 9 sujets retenus de 5 et 6 ans[1], 7 ont acquis au cours de l'expérience une certaine conservation de la quantité de matière. Mais il s'est trouvé, malgré les changements de positions utilisés dans la technique (d'abord sur les petites boulettes servant de morceaux à l'état isolé puis sur les éléments fusionnés), que les sujets se sont centrés sur le nombre des éléments et non pas sur leurs déplacements eux-mêmes. Il n'y a donc pas eu pour chacun de ces 7 sujets de commutabilité au sens plein du terme, de telle sorte que 4 d'entre eux ont oscillé ou n'ont pas résisté aux contre-suggestions proposant l'inégalité en fonction de la forme d'ensemble, 3 seulement ayant maintenu leur raisonnement de conservation. L'intérêt de cette situation est donc de nous permettre d'analyser les difficultés de la commutabilité dans le domaine du continu, en attendant de la retrouver en

1. Parmi 23 examinés, seuls ces 9 échouaient à la conservation et se situeraient à un niveau intermédiaire, la conservation de la matière étant malheureusement devenue à Genève un objet d'enseignement.

un sens complet au paragraphe suivant en appliquant une technique parallèle à celle du § 1 pour le discret.

Pour l'instant, la méthode suivie, après avoir déterminé en un prétest le niveau du sujet, a donc consisté à présenter deux collections de 5 petites boulettes de mêmes tailles, mais de trois couleurs différentes. On commence par des déplacements à l'intérieur de l'une des collections pour vérifier l'invariance du nombre, puis on fusionne 2, 3, 4 et les 5 boulettes qu'on arrondit en une grosse boule où les petites ne sont plus différenciables que par leur couleur. On cherche alors si les jugements portant sur la quantité ont été modifiés par les exercices précédents.

On a vu que les 9 sujets retenus se répartissent en trois catégories : 2 qui en demeurent à la non-conservation, 4 qui parviennent à l'invariance mais avec oscillations et restent sensibles aux contre-suggestions et 3 qui accèdent, en cours d'expérience, à la conservation nécessaire. Voici des exemples :

Kaz (6;6) estime que 6 éléments font autant lorsqu'on espace leur rangée ou qu'on les met en tas, mais en arrondissant deux boulettes en une seule « *vous avez plus* (que les deux séparées). – Pourquoi ? – *Parce que c'est plus gros.* – Et si on défait ? – *On aura la même chose* ». Même réaction avec 5 et 5 : « *Vous en avez plus parce que c'est plus gros, mais c'est toujours le même nombre de petites boules.* – Et si on les mange ? – *On ne mange pas les deux la même chose.* – Et si je défais ? – *On aura la même chose.* » Ce sont donc là des réponses typiques du premier groupe.

Fan (6;5) est par contre de la seconde catégorie : 5 boulettes collées font « *la même chose, parce qu'on n'a pas trop aplati : on voit les raies* ». Par contre, en arrondissant davantage « *il y a plus dans la grosse boule.* Combien de boulettes ? – *5 et 5.* – C'est plus juste de dire que quelqu'un a plus ou qu'on a les deux la même chose ? – *Qu'on a les deux la même chose.* – Pas plus dans la grosse boule ? – *Non il y a la même chose de petites boules.* – Et si on les mange quelqu'un a plus dans le ventre ? – *Oui, dans la grosse boule* ». Puis elle admet l'égalité : « Mais c'est une grosse boule, ça ne fait rien ? – *Non parce qu'il y a quand même 5 petites.* – On pourrait les retrouver dans la grosse ? – *Oui.* » Etc., mais au post-test la conservation n'est pas acquise : il y a plus dans la saucisse.

Pat (6;9) de même oscille entre les deux opinions : « *Il y a plus là* (grosse boule) *parce qu'il y en a 5 et là… non, on a les deux la même chose.* – Et quand on forme une grosse boule ? – *Pas la même chose, parce que là* (boulettes) *il y a 5 et là c'est toute une boule.* »

Dra (6;4) admet d'abord l'égalité en fonction de la correspondance numérique des couleurs : « *Parce que vous avez 2 bleus, 2 jaunes et 1 rouge : on a la même chose* », mais en arrondissant davantage il « *y a plus là, parce que ça fait un ballon, et là de petites balles* ».

VER (6;9) est par contre un cas type de la troisième catégorie : « *Ça fera la même chose. Ça ne change pas si on déplace, c'est la même chose.* – (On serre encore). – *C'est la même chose, mais chez vous ils sont serrés.* » « *Si vous défaites les boules* (dans la grande) *ça fait autant. Laissées comme ça c'est la même chose.* » Réussites au post-test.

Le fait le plus remarquable en ces réactions est que les sujets du premier groupe affirment la conservation du nombre lorsque les 5 boulettes demeurent discontinues, mais nient celle de la substance sitôt qu'elles sont collées : comme le déclare Kar « il y a plus parce que c'est plus gros, mais c'est toujours le même nombre ». Nous savions depuis longtemps que cette conservation de la quantité se constitue plus tard dans le discret que celle de la quotité. Mais ce qui est nouveau, dans le présent cas, est que ces sujets parviennent bien à la conservation de la quantité, et non pas seulement de la quotité, lorsque les boulettes demeurent discontinues, et qu'ensuite ils la refusent dès qu'elles forment un tout continu et cela bien que les 5 unités demeurent présentes et différenciables par leur couleur. Autrement dit, en passant du discontinu au continu les sujets régressent en substituant à l'enveloppement opératoire (collection dont la quantité est égale à la somme des parties et se conserve lors des changements de forme) un enveloppement préopératoire où la quantité totale est autre chose, et en général plus, que la somme des parties et où elle dépend de la forme du tout. Or il est nettement insuffisant d'attribuer ce passage régressif à un remplacement des opérations logico-arithmétiques (5 unités égales) par les opérations infralogiques, d'abord parce qu'au niveau préopératoire toutes deux interviennent toujours, mais indifférenciées et sans cesse confondues, et ensuite parce que les compositions infralogiques, une fois opératoires, sont isomorphes aux compositions logico-arithmétiques et cela bien que les voisinages se substituent aux ressemblances et les partitions au sein d'un continu aux partitions discrètes. Il faut donc trouver mieux. Notre hypothèse est alors que ce qui manque à ce second enveloppement pour acquérir un niveau opératoire (conservation) malgré son caractère infralogique est la commutabilité, qui ne fait pas problème lors des collections de 5 unités et qui reste ignorée lorsqu'on les fusionne en une grosse boule totale. Une comparaison avec un propos suggestif du grand Eddington fera comprendre le sens de cette supposition avant de la discuter de plus près.

On sait qu'en microphysique il arrive que la réunion de deux systèmes dont les énergies sont $E1$ et $E2$ ne donne pas comme résultante la somme $E1 + E2$ mais bien $E1 + E2 + \varepsilon$ où ce qui s'ajoute est dit énergie d'interaction ou d'échange ; cela rappelle donc nos enveloppements infralogiques où le tout vaut plus que la somme des parties. Or, Eddington exprime ses doutes à cet égard et compare cette situation à ce que serait celle d'un astronome étudiant un système d'étoiles doubles, mais sans pouvoir suivre suffisamment leurs trajectoires et en les confondant à l'occasion : en ce cas, on ne trouverait pas un système correspondant simplement aux équations de Newton, mais quelque chose en plus dû aux fausses liaisons.

A en revenir à nos sujets du premier groupe, nous voyons alors que si, à propos des 5 boulettes ils en peuvent suivre les déplacements quand on modifie leurs positions et conserver ainsi leur somme lors des changements de forme du tout, il suffit au contraire de les fusionner en une grosse boule pour qu'elles se déplacent en changeant elles-mêmes de forme. Il en résulte que, dans le continu, outre les obstacles perceptivo-représentatifs (donc figuratifs) que constituent les voisinages entièrement contigus et les différentes formes spatiales du tout, il intervient deux sortes de déplacements et non pas une seule forme comme dans le cas du discret : ceux des éléments (les 5 boulettes) les uns par rapport aux autres et ceux des parties internes de ces éléments, puisqu'ils changent eux-mêmes de forme. II est donc, en cette situation, doublement difficile de parvenir à une commutabilité qui assurerait une identité extensive aux 5 éléments alors que, dans le discret, le passage de l'identité qualitative ou intensive (suffisante pour les nommer, comme lors de la conservation de la quotité) à l'extensive (d'où la quantité comme produit d'une réunion) est notablement plus rapide. En bref, la double nature des déplacements (puisque les 5 éléments changent eux-mêmes de forme) empêche la généralisation de la commutabilité, déjà acquise par les sujets dans le discret, empêche aussi la formation d'une identité de rang supérieur, que les couleurs distinctes de ces éléments ne suffit pas à leur assurer, et fait donc, au total, obstacle à l'additivité qui serait nécessaire à la conservation du tout : il ne reste ainsi, pour évaluer la quantité de ce tout, que sa forme spatiale d'ensemble.

Les quatre sujets d'un second groupe sont encore plus intéressants parce qu'ils utilisent tour à tour les deux modes d'évaluation. En premier lieu, lorsqu'on accole les 5 boulettes en une boule totale, ils se rappellent le point d'origine de ces déplacements : elles étaient séparées, bien distinctes, et leurs déplacements n'ont consisté qu'à les réunir, d'où une première tendance conduisant à la conservation du tout en tant que réunion d'éléments qu'on a simplement rapprochés et collés. Il y a donc là un début de commutabilité. Par contre, dès que leur attention se centre sur les formes totales, ils sont bien obligés de reconnaître que les 5 éléments n'ont pas simplement été réunis (comme des jetons que l'on serre ou que l'on espace en une rangée dont la longueur seule varie), mais qu'ils ont changé de forme et sont eux-mêmes étirés (voir les « raies » de Fan) de telle sorte que la commutabilité, valable lorsque le sujet ne pense qu'à leur point de départ, ne saurait être généralisée sans plus quant aux déplacements intervenant dans les changements de forme des éléments eux-mêmes, ni donc dans l'explication des déformations de la boule totale en tant que telle, d'où alors la perte de l'identité extensive et de l'additivité et le retour aux enveloppements préopératoires fondés sur la forme spatiale. Autrement dit, le fait de ne pas procéder à des suppressions initiales et des réadjonctions finales, comme dans la technique du § 1, et de se borner à réunir des éléments préalablement séparés ne suffit pas à assurer une généralisation suffisante à la commutabilité pour qu'elle assure de façon stable un dépassement par rapport aux enveloppements préopératoires.

Les trois sujets du 3^e^ groupe admettent en revanche un isomorphisme suffisant entre les opérations infralogiques et logico-arithmétiques pour parvenir, même dans le continu, à un enveloppement opératoire où le tout devient égal à la somme des parties et se conserve par conséquent lors des modifications de la forme, d'ensemble. Leurs arguments sont, en effet, de deux sortes. Les uns reviennent à appliquer les opérations logico-arithmétiques au continu : étant donné la correspondance terme à terme (« un bleu, un bleu, un rouge, un rouge, etc. ») on a alors l'équivalence numérique (et pas seulement extensive) : « il y a 5 et 5 », indépendamment des changements de forme de ces éléments.

Les autres font au contraire appel à l'identité extensive des morceaux, donc à leur additivité, puisque équivalents en tant que réunis en un même tout : « ils ne sont que collés » et quoique déformés « si on les déplace, c'est la même chose » comme le dit Vez qui atteint ainsi la commutabilité.

Au total on retrouve en ces résultats ce qu'avaient observé Inhelder, Sinclair, Bovet (1974) : elles avaient déjà appliqué cette technique à laquelle on a ajouté ici les différences de couleur pour les boulettes de départ. On assiste à quelques progrès dans la conservation (groupes n° 3 et en partie n° 2), mais limités, du fait que la commutabilité n'est pas suggérée, comme ce sera le cas au paragraphe suivant, par une suppression initiale d'une partie du tout, rajoutée ensuite sur un autre point, et que l'on se borne à réunir des éléments initialement séparés.

6. LA COMMUTABILITÉ AU SEIN DE TOTALITÉS CONTINUES

Ce dernier paragraphe reprend dans le domaine du continu l'expérience du § 1. Après un prétest sur la boule de pâte avec changements de forme, on repart de la boule et on lui enlève un morceau que l'on recolle d'un autre côté, et ainsi de suite jusqu'à former une saucisse, en interrogeant à chaque reprise sur la conservation de la quantité (totale).

On a ainsi trouvé sur 11 sujets de 5-6 ans les catégories habituelles : 2 ne progressent pas faute d'opérativité suffisante (pas de conservation de la quotité dans l'épreuve des jetons), 5 sont intermédiaires et progressent en relation avec leur niveau de départ et 4 parviennent à une conservation apparemment stable.

Les sujets du premier groupe sont particulièrement significatifs :

REN (6 ans) : « Si je prends ce morceau-là et je le remets là, on a toujours la même chose ? – *Pas la même chose.* – Pourquoi ? – *Parce que tu as fait comme ça* (geste d'aplatir) *et c'est plus petit.* – Dans la tienne il y a plus ? – *Plus dans celle-là* (celle où il y a eu transfert). – Avant on avait pareil ? – *Oui.* – Et quand on fait comme ça (on refait le transport) ? – *Ça fait plus qu'avant.* – (Nouveau transport). – *Ça fait beaucoup plus qu'avant.* – (3^e^). – *Encore plus.* – Et si je remets le bout ? – *Un peu moins qu'avant* », etc., jusqu'au retour à l'état initial. Ren échoue aussi à la commutabilité dans le discret. N'importe quel déplacement des jetons modifie la quantité : « *Ça fait plus ou moins quand on les bouge c'est un petit peu comme le lac quand il y a des grosses vagues.* »

SAB (5 ans). « Si je prends ce morceau on a la même chose ? – *Non.* – Et si je le remets là ? – (ailleurs) – *Non.* – Pourquoi ?– *Parce qu'il n'est pas bien roulé.* – Quoi faire pour avoir la même chose ? – *Il faut le rouler.* »

L'intérêt de ces cas est double. On voit d'abord que l'habitude de juger du résultat des déplacements par le seul point d'arrivée, en oubliant le départ initial, est si invétérée que, même en enlevant explicitement des morceaux de la boule pour les remettre ailleurs, des sujets comme Ren peuvent ne penser (encore à 6 ans) qu'aux adjonctions successives en oubliant chaque fois la soustraction précédente : ce sujet nous fournit ainsi une belle illustration de la raison principale des non-conservations. Mais, en second lieu, Sab comme Ren soulèvent spontanément le problème de l'identité du mobile déplacé. Ils admettent bien entendu son identité qualitative donc intensive : c'est le même morceau qu'on a replacé ailleurs après l'avoir enlevé, seulement il ne conserve pas pour autant son identité extensive (donc en extension, quoique avant toute mesure) : si on l'a applati (Ren) ou « pas bien roulé » (Sab) il a alors changé de quantité comme de forme et ne se prête plus à la composition additive, même aussi élémentaire qu'une compensation entre les suppressions et les réadjonctions.

Les sujets d'un second groupe, quoique sans conservation au prétest parviennent à une conservation bien motivée, en fonction de la commutabilité, mais cèdent à des contre-suggestions ou lorsque les différences spatiales deviennent trop considérables. Voici des exemples, à commencer par un cas intermédiaire :

OSC (5;5 et 5;6) lors d'une première séance, en reste au niveau précédent : « *Il y a plus : c'est plus grand.* – (2^e^ transport). – *Plus le tien.* – (3^e^). – *Le tien plus parce que tu enlèves chaque fois ici et tu le mets ici.* – Alors ça fait plus? – *Oui.* » Mais un mois après : « *Toujours la même chose. Quand on enlève un morceau il y a moins et quand on le remet c'est égal* », puis : « *Toujours la même chose, mais ça fait une saucisse.* » Mais à la fin il cède : Il y a plus quand c'est trop long.

NIN (6;2) demeure, au prétest, très étrangère à la conservation. « Je vais prendre un morceau à cette boule et je la mets là. C'est toujours la même chose de pâte ? – *Oui c'est la même grandeur, même chose que celle-ci.* – Je recommence (etc. trois fois). – *Oui, parce que c'est le même* (morceau). – Et une très grande saucisse ? – *Non, oui, oui, c'est plus long mais c'est la même chose.*» « Mais si c'était long comme ça, ce serait la même grandeur ? – *Comme ça ce serait plus.* » Nin cède donc à la suggestion mais prévoit néanmoins l'amincissement graduel de la saucisse. Au post-test elle reste hésitante pour les boudins trop longs, mais il y a progrès net sur le prétest. Il est en outre à noter que trois mois auparavant il y avait échec à l'épreuve du § 5 (fusionnement).

DRO (5;6) de même, lors des premiers transports, dit : « *C'est exactement la même chose* » mais pour des saucisses trop longues, cela fait « *un peu plus* ». – Plus qu'avant ? – « *Je ne sais pas.* »

TON (6;6) au prétest croit qu'il y a plus de pâte dans la saucisse et accepte d'en enlever un bout pour l'égaliser à la boule. Mais, lors des transports, il y a égalité « *seulement le bout a changé de place* ». On recommence cinq fois : « *Toujours la même chose, seulement ce n'est pas la même grandeur.* – Si tu mangeais ça et moi ça ? – *On aurait la même chose.* » Après quoi il reconnaît avoir pensé : « *qu'on n'avait pas la même chose.* – Qui avait plus ? – *Vous* (la longue saucisse). – Et puis maintenant ? – *Vous avez changé la boule, pas enlevé de pâte, c'est la même chose, seulement c'est long ;* (c'est) *si vous enlevez un bout* (qu') *on aura plus la même chose* ». La mise en miettes de la boule conserve aussi la quantité.

Ces cas sont intéressants, l'un quant au remplacement du déplacement-production de matière par la commutabilité avec ses compensations (Osc), les autres par leur défaut de généralisation récurrentielle. Leur généralisation est cependant suffisante pour que le sujet comprenne à la fois que le déplacement externe d'un morceau conserve la quantité totale (« quand on le remet c'est égal ») et que les déplacements internes du morceau qui change de forme lors de sa réintroduction lui conservent sa quantité partielle : « c'est la même grandeur (totale) », dit ainsi Nin « parce que c'est le même (morceau) », conférant ainsi à celui-ci une identité extensive et non plus seulement intensive (comme Ren et Sab cités précédemment). Cependant la généralisation n'est pas encore assez forte pour résister aux allongements trop grands de la saucisse et il y a alors retour à l'enveloppement préopératoire.

En un troisième groupe de sujets, la généralisation devient par contre complète et la conservation ainsi acquise dès 5 ans (à partir d'un échec au prétest) se stabilise, du moins aux posttests (jusqu'à deux mois plus tard) :

CEC (5;10) est vue en deux séances. Lors de la première, elle et d'abord nettement du niveau II, mais se corrige à la fin non moins clairement : « *C'est la même chose parce qu'on n'a rien enlevé* » ou «*parce qu'il n'y a pas un petit bout de la pâte qui manque* ». On la revoit une semaine après, elle est d'emblée catégorique et avec les mêmes arguments.

DAV (5;9) lors d'un premier examen n'a aucune conservation ni du nombre ni du continu ; il échoue à l'épreuve des feuilles du § 2 à laquelle se borne alors l'interrogation. Quatre mois plus tard il conserve la quotité mais pas la substance. Lors des transports il réagit par contre d'emblée correctement : lorsqu'on enlève un morceau « *tu as plus que moi* » et quand on le remet ailleurs « *on a la même chose* ». Puis « *encore la même chose* », etc., et enfin « *on a toujours la même chose* ».

Fra (5;6) est franchement non conservatoire au prétest mais dès le premier transport « *on a la même chose* » puis « *encore* » et « *toujours* ». Pour une saucisse très longue, légère hésitation puis à nouveau « *on aura toujours la même chose* ». Revue deux mois après, la conservation est assurée.

Ser (6;8). « T*oujours la même chose parce que c'était la même boule.* »

On voit qu'ainsi la commutabilité donne les mêmes résultats dans le continu qu'à propos du discret, mais avec un léger décalage reconnaissable à la plus grande proportion de cas intermédiaires (groupe II).

7. CONCLUSIONS

A) La première des questions que nous nous proposions de discuter en cet article est celle des relations entre les réactions au discret et au continu, autrement dit entre les opérations ou préopérations logico-mathématiques, fondées sur les ressemblances et différences entre les éléments, et les opérations ou préopérations infralogiques[1] fondées sur les voisinages et séparations entre parties d'un même objet à toutes les échelles. Ce problème déjà posé dans les conclusions de l'ouvrage *Le développement des quantités physiques chez l'enfant* (Piaget, Inhelder, 1941) a été renouvelé par les études sur l'apprentissage de Inhelder, Sinclair et Bovet (1974) qui ont mis en évidence des relations et interactions plus complexes que prévues et excluant toute filiation simple de l'un des systèmes à partir de l'autre.

L'hypothèse qui semble donc s'imposer est que, au départ et à divers degrés (mais faiblissants) au cours de toute la période préopératoire, il y a indifférenciation relative entre les deux systèmes avec appuis mais aussi déformations mutuels ; qu'ensuite leur différenciation progressive permet des interactions plus fécondes, jusqu'à une intégration consistant en un isomorphisme détaillé entre les deux sortes d'opérations (additions partitives et réunions de classes, etc., jusqu'au développement de la mesure selon le même processus synthétique de partition et d'ordre que la construction du nombre).

1. Le terme infralogique se réfère à la théorie des types où l'objet est de type 0 par opposition aux classes, classes de classes, etc., de types 1, 2, etc.

L'indifférenciation initiale est évidente sur tous les points où les collections (ou préclasses) et les prénombres demeurent tributaires de facteurs spatiaux et on l'a revu ici même (§ 2, etc.) à propos de la longueur des rangées numériques, etc. Mais la réciproque est tout aussi vraie et les multiples structures infralogiques qu'élabore le jeune sujet sont en partie tributaires d'une conceptualisation continuelle en « compréhension » sans laquelle la pensée ne fonctionnerait pas. De même les généralisations, abstractions, etc., à partir de jugements infralogiques relèvent d'un fonctionnement général commun aux deux systèmes. Le dessin enfantin, comme l'a montré Luquet, ne débute pas par de simples correspondances spatiales mais par un « réalisme intellectuel » traduisant graphiquement le concept que le sujet se donne de l'objet et cela peut rester vrai de figures géométriques ; exemple : un losange dessiné effectivement comme « un carré avec une pointe » (celle-ci étant posée sur un carré ou rajoutée du dehors à l'un des angles).

Quant aux interactions solidaires des différenciations, la commutabilité étudiée en cet article en fournit de bons exemples. Entre l'action de déplacer une unité en une collection pour l'y replacer différemment et l'action semblable portant sur un morceau de totalité continue, il y a certes un ensemble de différences importantes relatives à la nature de l'unité (« unité » logique ou numérique équivalant aux autres en opposition avec un « morceau » quelconque sans délimitation assignable d'avance), ou statut de l'identité au cours et au terme du trajet (selon qu'il y a ou non changements de forme de l'élément déplacé), aux rapports entre les déplacements et la forme d'ensemble des totalités considérées, à la structure de l'enveloppement, etc. Il n'en subsiste pas moins un ensemble de mécanismes communs assurant un isomorphisme final entre les opérations logico-arithmétiques et les actions infralogiques une fois devenues opératoires ; qu'il s'agisse d'additions numériques, de réunions d'individus ou de classes ou d'additions partitives (ajustement des « morceaux » en un même objet total), il y a finalement en tous ces cas compensation exacte entre les soustractions et les additions. Que la forme d'ensemble soit celle d'une collection ou d'un objet topologiquement continu, il y a en définitive équivalence entre la quantité totale et la somme des parties (enveloppement opératoire). Au contraire il y avait aux niveaux antérieurs davantage dans l'une que dans l'autre (enveloppements préopératoires), qu'il s'agisse de rangées d'éléments discrets ou de boules de pâte, etc. Or, avant d'en arriver à ces isomorphismes opératoires, les différenciations entre les deux domaines s'accompagnent d'interactions préparant les intégrations par isomorphisme terminal. C'est ainsi que la conservation des quotités (ce qui constitue une différenciation par rapport à l'estimation du nombre en fonction de la longueur infralogique des rangées) facilite la compréhension de la commutabilité, y compris dans le continu. De même Inhelder, Sinclair et Bovet (1974) ont montré une action favorable de l'inclusion des classes sur les conservations dans le continu, et cela davantage que dans le sens inverse. En un mot, les généralisations de la commutabilité, étudiées en ces pages, montrent assez l'erreur qu'il y aurait à opposer radicalement les processus infralogiques aux processus logico-arithmétiques, alors qu'ils sont solidaires à tous les niveaux mais de différentes manières (cf. la méréologie de Lesnievski).

B) Cela dit, il n'en reste pas moins qu'il existe un décalage assez net entre les conservations dans le discret et dans le continu, les secondes étant plus tardives. Or, ce qui précède montre assez qu'il ne suffit pas, pour expliquer ce retard, d'opposer simplement l'infralogique au logico-arithmétique, puisqu'il y a isomorphisme final entre les deux sortes d'opérations. Le fait que l'unité soit donnée dans le discret et à construire dans le continu intéresse surtout le niveau de la mesure, nettement ultérieur à celui des conservations. L'enveloppement préopératoire est aussi important dans le discret que dans le continu et le § 2 nous a montré la prégnance des rangées linéaires numériques (le rôle de la feuille plus petite que celle du modèle s'est montré surtout intéressant par les efforts des jeunes sujets pour concilier l'enveloppement normal qui est pour eux la rangée, avec les frontières de cette enveloppe ajoutée arbitrairement). L'opposition entre les déplacements externes (enlever un morceau de pâte pour le remettre ailleurs) et internes (pousser la pâte pour faire une saucisse) est sans doute plus accusée dans le continu que dans le discret, mais 1) quand les sujets ont compris la commutabilité par déplacements externes ils la généralisent aussitôt aux mouvements internes puisqu'ils parviennent à la conservation lors des simples allongements ; 2) dans le discret le déplacement d'un élément ne suffit précisément pas à lui seul à entraîner la conservation chez les sujets préopératoires, et il faut également en ce cas, pour leur faire comprendre la commutabilité, procéder à des actions d'enlever et de réajouter, donc à des déplacements externes.

La raison principale du retard des conservations dans le continu, donc de la difficulté à comprendre que les changements de forme ne sont dus qu'à des déplacements où ce qui est ajouté à l'arrivée équivaut à ce qui est enlevé au départ, tient beaucoup plus simplement à ce fait essentiel que lors du changement de forme d'une collection les éléments discrets ne changent pas eux-mêmes de forme quand on les déplace, tandis qu'en un tout continu comme la boule de pâte transformée en boudin, les morceaux déplacés sont eux-mêmes modifiés en leur forme. Il en résulte alors que, pour réduire les nouvelles formes d'ensemble à de simples déplacements, donc pour conserver l'identité extensive des parties déplacées, le sujet est obligé de composer entre eux deux sortes de déplacements : 1) ceux des parties que l'on enlève et remet ou que l'on pousse simplement ; et 2) ceux qui sont internes aux parties elles-mêmes et qui conservent leur identité extensive indépendamment de leurs changements de forme (voir au § 6 les cas de Ose et Nm comparés à ceux de Ren et Sab). Dans le discret, au contraire, le problème ne se pose pas, de telle sorte qu'il y a une différence de type logique (au sens de la théorie des types) entre les déplacements d'un élément individuel, plus simples, et ceux d'un « morceau » déformable, plus difficiles à dominer puisque déplacements à la seconde puissance.

Cette première différence en entraîne alors une seconde, relative aux enveloppements et il est plus clair de la décrire en termes de morphismes, car les « correspondances » du niveau préopératoire préparent aussi bien les opérations infralogiques de partition du continu que les opérations logico-arithmétiques en général. Dans le cas des enveloppements continus, il y a, bien entendu, surjection[1] facile de tous les morceaux délimitables

1. La surjection comprend entre autres la correspondance plusieurs à un » et nous appellerons « multijection » sa réciproque « un à plusieurs ».

ou non, dans la forme enveloppante, puisqu'elle les entoure. Par contre, retrouver les (ou même certains) morceaux à partir du tout par multijection n'est pas réalisable avant la représentation ou l'imagination d'une partition possible, d'abord parce que ces morceaux sont contigus par voisinage immédiat, et non pas disjoints, et ensuite parce que ces morceaux changent de forme en se déplaçant. Par contre, dans les collections logico-arithmétiques il est plus facile de retrouver les éléments par multijection comme le montre la conservation des quotités antérieures à celle des quantités.

Mais il est essentiel de noter que cette différence des deux sortes d'enveloppements infralogiques et logiques n'existe qu'aux niveaux préopératoires, la multijection infralogique devenant possible avec les opérations partitives, et que cette différence est elle-même le produit d'une différenciation et non pas d'une opposition dès le départ. Nous avons vu, en effet, au § 3, des sujets pour lesquels l'adjonction de nouveaux éléments au milieu d'une rangée numérique n'en modifie pas la quantité : c'est assez dire qu'à ce niveau la surjection de ces éléments surajoutés va de soi mais qu'il n'y a pas davantage de multijection que dans les totalités continues.

C) Les différences entre les conservations dans le continu et dans le discret étant ainsi rappelées, il nous reste à résumer nos interprétations quant au passage des enveloppements préopératoires à ceux de forme opératoire selon des processus communs à l'infralogique et au logico-arithmétique et qui sont fondés sur la commutabilité. Rappelons que les enveloppements opératoires sont ceux 1) dont la quantité totale est égale à la somme des parties et 2) dont cette quantité se conserve indépendamment des changements de forme spatiale de la collection[1] ou de l'objet continu ; au contraire les enveloppements préopératoires sont encore dépourvus de ces deux propriétés. En ce qui suit nous partirons des réactions aux changements de forme 2) pour aboutir à l'additivité 1).

La condition préalable pour qu'il y ait conservation de l'enveloppé en sa quantité totale malgré les changements de forme de l'enveloppant est que ceux-ci soient conçus comme

1. Nous parlons d'opérations concrètes : la classe des chats peut être une collection de photographies posées sur la table ou l'ensemble des chats répartis dans l'univers.

dus à des déplacements. Il n'y a donc pas de primat des formes : ces dernières sont le résultat de déplacements, de même que tout déplacement est un changement de position qui modifie une forme. Mais encore faut-il que le déplacement ne soit compris que comme un tel changement de position. Or, pour les jeunes sujets qui bien entendu voient déjà les déplacements quand on étire une boulette en boudin ou quand on espace les jetons d'une rangée, ces déplacements sont bien davantage que des changements de position : ce sont des *productions* qui ajoutent quelque chose aux quantités de départ. Même dans le cas où deux réglettes, d'abord perçues égales par congruence, mais dont celle qu'on avance pour dépasser un peu la seconde est censée devenir « plus longue », ce petit déplacement est déjà productif de grandeur et exclut ainsi l'identité extensive du mobile (et donc de ses « morceaux »). La condition pour que le déplacement explique la permanence des quantités (du mobile comme de tout l'enveloppé) est par conséquent qu'il se réduise à un simple changement de position mais celui-ci est alors de ce fait même chargé de significations multiples et c'est pourquoi nous parlons de « commutabilité » pour dégager ces implications signifiantes que découvre peu à peu le sujet quand on ne lui facilite pas la compréhension comme aux § 1 et 6.

La première de ces implications est qu'on ne trouve rien de plus au terme du mouvement, que ce qui est parti au point d'origine, ce qui comporte donc une compensation entre ce qui est additif à l'arrivée et ce qui est soustractif au départ (cf. par exemple l'égalisation tardive, dans le cas des réglettes rappelées à l'instant entre le dépassement de celle qu'on a avancée et la place laissée vide derrière elle) (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948). C'est cette compensation qui a été facilitée par les techniques des § 1 et 6 mais elle se produit spontanément lorsque les sujets, étirant une boulette en saucisse s'aperçoivent (tardivement) du fait qu'elle s'amincit : ils comprennent alors, d'une part, qu'ils n'ont rien effectué de plus que de déplacer des morceaux, même non délimitables (« on n'a fait qu'allonger ») d'où, d'autre part, la compensation entre ce qui est ajouté en longueur et diminué ailleurs (en largeur) ; cette compensation (explicitement formulée par nombre de sujets), si mystérieuse en apparence, puisqu'elle ne repose sur aucune mesure, va en revanche de soi sitôt les changements de forme compris comme résultant de simples déplacements (donc sans « productions »).

La seconde implication essentielle de cette réduction au déplacement et de la commutabilité qu'elle signifie, est l'identité extensive du mobile déplacé. On peut distinguer trois sortes d'identités ou équivalences réflexives : 1) L'identité qualitative ou intensive affirmant qu'il s'agit du même objet même s'il change de quantité (exemple « c'est la même eau » en cas de transvasement avec accroissement de matière) ; 2) l'identité extensive conservant la quantité propre à l'objet même s'il change de forme et si sa valeur quantitative n'est égale à aucune autre (donc sans intervention d'unités) ; 3) l'identité numérique d'un élément valant une unité équivalant à toutes les autres[1]. Cela dit, même les morceaux d'un continu, qui changent de forme au cours de leurs déplacements, parviennent à une identité extensive du fait de la généralisation de la commutabilité à l'intérieur de ces morceaux dont les « sous-morceaux » se déplacent eux-mêmes puisqu'ils modifient les formes initiales[2]. Le fait que ni les uns ni les autres ne constituent des unités ou sous-unités n'exclut donc en rien leur identité quantitative.

La troisième implication de la commutabilité est alors l'additivité car, si un élément discret ou un morceau conservent leur identité extensive en changeant de place ou même de forme, il en sera de même de plusieurs, et cela indépendamment des identités numériques. De plus, comme ces mobiles m se conservent et qu'il en sera *a fortiori* de même des éléments m' demeurés immobiles, le sujet en tirera la conservation de $m + m'$ conduisant jusqu'à celle de la totalité elle-même, de telle sorte que l'enveloppement deviendra ainsi opératoire et s'identifiera à la somme des parties.

Mais comme on l'a vu au § 4, l'ordre des réunions $m + m'$

1. Notons que dans la conservation de la quotité sans la quantité les éléments ne restent qualifiés que par leurs noms : il n'y a donc pas encore là d'identités numériques.

2. Il va de soi que l'enfant ne raisonne pas explicitement sur ces « sous-morceaux » et qu'il n'en a pas besoin. Nous prétendons simplement que, ayant compris la conservation de la totalité en s'appuyant sur le fait que ses changements de forme sont dus à de simples déplacements, il généralise ce schème de conservation aux morceaux, mais en se bornant sans doute à penser que leurs propres changements de forme sont de même nature que ceux du tout. Il n'en est pas moins probable que, dans la suite, cette assimilation entre les deux échelles du tout et des parties conduira à cette sorte d'atomisme mais d'abord macroscopique, comme le suggérait l'ouvrage sur *Le développement des quantités physiques chez l'enfant* (Piaget, Inhelder, 1941).

restera quelconque sans impliquer nécessairement l'ordre linéaire de la commutativité $n + n' = n' + n$.

Il reste à préciser ce point important que les compensations, identités extensives et additivités inhérentes à la commutabilité ne supposent nullement, lorsqu'elles sont appliquées au continu, une partition effective préalable. Les déplacements une fois compris comme de simples changements de positions, laissant invariante la quantité tout en changeant les formes, impliquent la représentation d'une partition possible, ne serait-ce qu'entre les parties déplacées et celles demeurant sur place ; et cela suffit à engendrer les compensations spatiales, les identités extensives (« on n'a rien ôté ni ajouté », ce qui confirme le statut psychologique de l'opération identique $+ x - x = 0$) et l'additivité ; car l'addition partitive, même lorsqu'elle porte sur des morceaux non délimités, mais délimitables, et même avant toute mesure ou constitution d'unités, est aussi opératoire que la réunion des classes ou l'addition numérique.

Au total, malgré toutes les différences qui séparent les enveloppements continus et topologiques des enveloppements non perceptibles mais non moins opérationnels constitués par les classes ou les nombres (en tant que réunions d'unités), les mécanismes constitutifs de leurs conservations opératoires n'en demeurent pas moins fondamentalement isomorphes. En terminant ces remarques nous nous excusons d'être revenus ainsi sur un problème posé dès 1941 (Piaget, Inhelder, 1941), mais il s'est révélé inépuisable, et la solution présentée ici nous paraît à la fois plus simple et relativement nouvelle.

RESUMÉ

L'hypothèse qu'il s'agit de vérifier – déjà énoncée dans Apprentissage et structures de la connaissance *– est qu'il n'existe pas de filiation directe entre les deux formes de conservation de totalités numériques et de quantités continues mais un processus de différenciation et d'interaction dont il convient de préciser le mécanisme. L'idée sous-jacente aux principes de conservation de quantité est que tout changement de forme d'une totalité se réduit aux déplacements de ses éléments ou parties, de sorte que ce qui a été placé ou ajouté sur un point équivaut à ce qui a été enlevé sur un autre. Les premiers faits présentés ici illustrent le rôle que joue cette « commutabilité » généralisée dans la genèse des quantifications élémentaires*

des systèmes discrets et continus. Ces nouveaux résultats vérifient ainsi le bien-fondé de l'idée de « commutabilité » présentée dans Recherches sur la contradiction *(Les relations entre affirmations et négations).*

BIBLIOGRAPHIE

CARRERAS (R.). – L'approche de *l'* « *infinitésimal* », en préparation.

GRECO (P.). – Une recherche sur la commutativité de l'addition, in *Structures numériques élémentaires*, Etudes d'épistémologie génétique, t. XIII, Paris, Presses Universitaires de France, 1962.

INHELDER (B.), PIAGET (J.). – De l'itération des actions à la récurrence élémentaire, in *La fonction des raisonnements récurrentiels*, Etudes d'épistémologie génétique, t. XVII, Paris, Presses Universitaires de France, 1963.

INHELDER (B.), SINCLAIR (H.), BOVET (M.). – *Apprentissage et structures de la connaissance*, chap. III, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

PIAGET (J.), INHELDER (B.). – *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, 1941, Neuchâtel et Paris, 3e éd., 1968, Delachaux & Niestlé.

PIAGET (J.), INHELDER (B.). – *La représentation de l'espace chez l'enfant*, 1948, chap. III, 2e éd., Paris, Presses Universitaires de France, 1972.

PIAGET (J.), INHELDER (B.), SZEMINSKA (A.). – *La géométrie spontanée chez l'enfant*, 1948, chap. IV, Paris, Presses Universitaires de France, 2e éd., 1973.

PIAGET (J.) avec LIAMBEY (D.) et PAPANDROPOULOU (I.). – *Correspondances et transformations*, in Etudes d'épistémologie génétique, en préparation.

PIAGET (J.) avec OTHENIN-GIRARD (Ch.) et UZAN (S.). – Contradiction et conservations des quantités, in *Recherches sur la contradiction* ; 2 : *Les relations entre affirmations et négations*, Etudes d'épistémologie génétique, t. XXXII, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

Note pour toutes les figures : les lettres *a*, *b*, etc., indiquent une succession temporelle.

Recherche réalisée avec l'aide de F.F.R.P. 69-469 Etats-Unis et F.N.R.S. 1.6610.72 Suisse.

(Accepté le 8 novembre 1974.)